COSE213: Data Structure

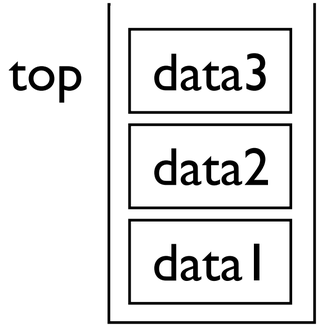
Lecture 7 - 트리 (Tree)

Minseok Jeon

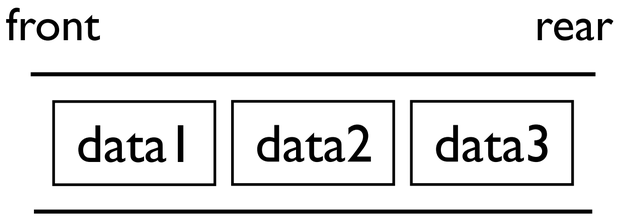
2024 Fall

리뷰: 선형 (linear) 자료구조

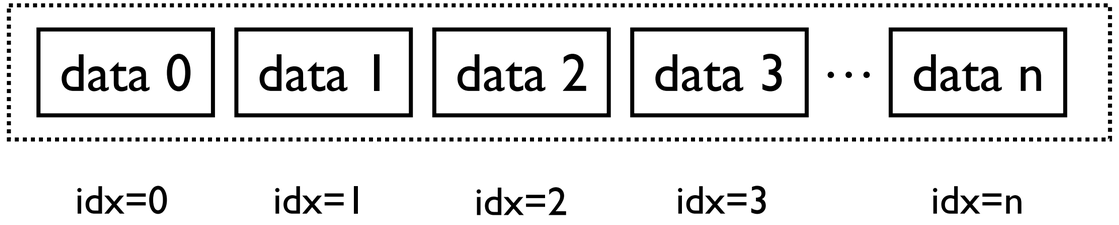
- 스택(Stack) 자료구조: 후입선출(LIFO) 원칙을 따르는 자료구조



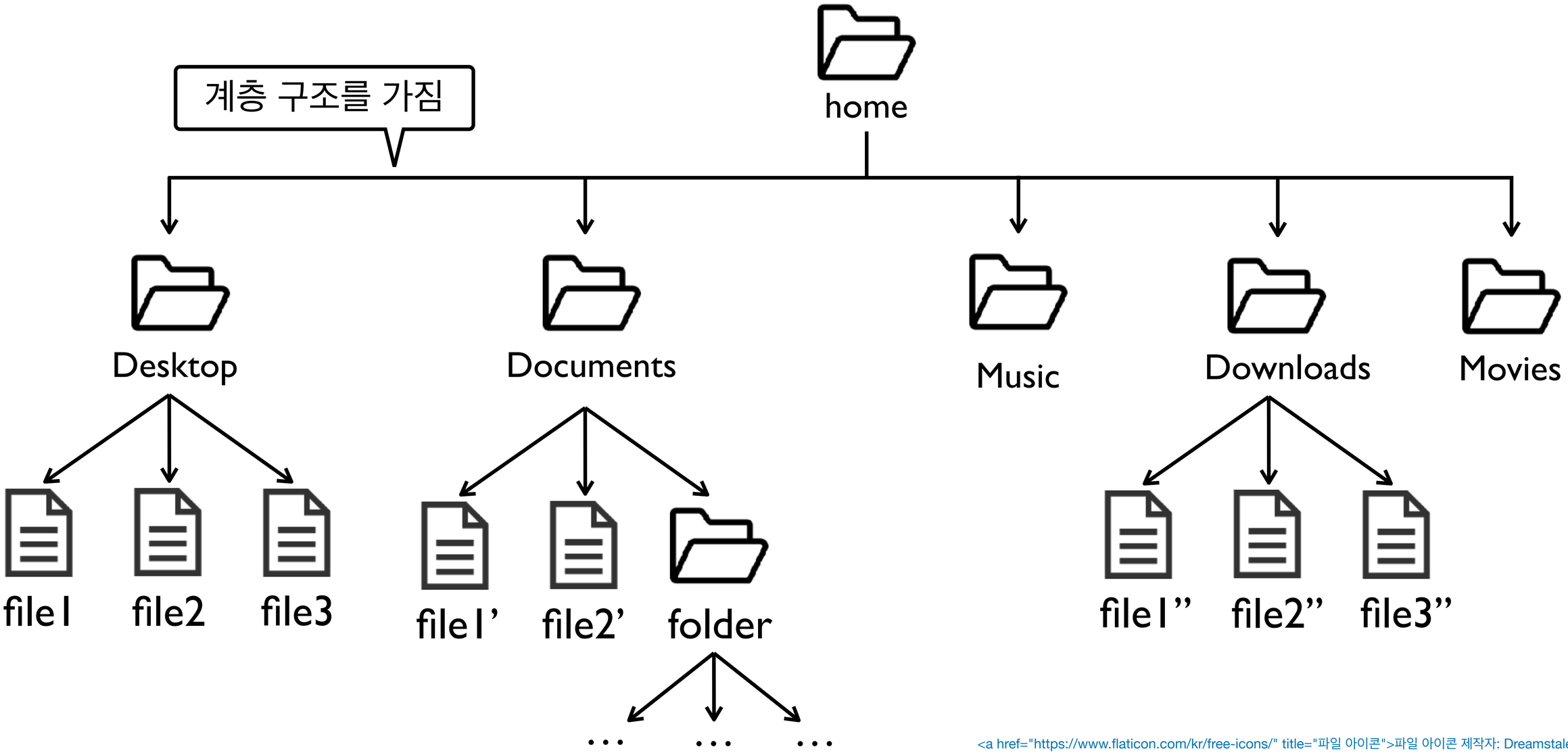
- 큐(Queue) 자료구조: 선입선출 원칙을 따르는 자료구조



- 리스트(list) 자료구조: 데이터들이 **순차적**으로 나열되어 있는 선형 자료구조



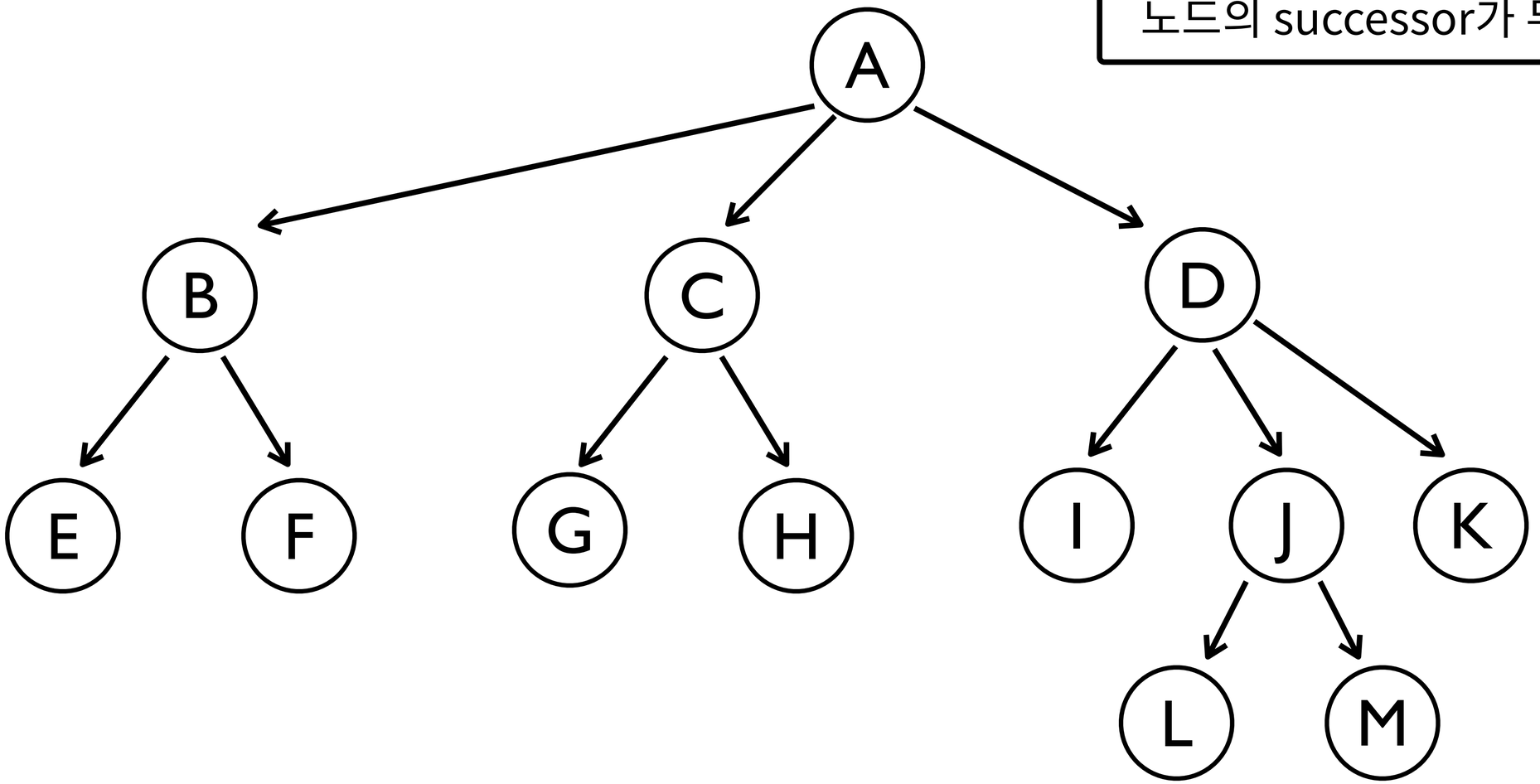
문제: 디렉터리(Directory) 구조 표현

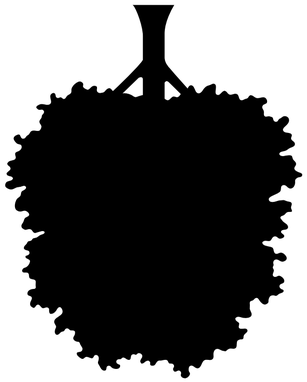


적합한 자료구조: 트리 (Tree)

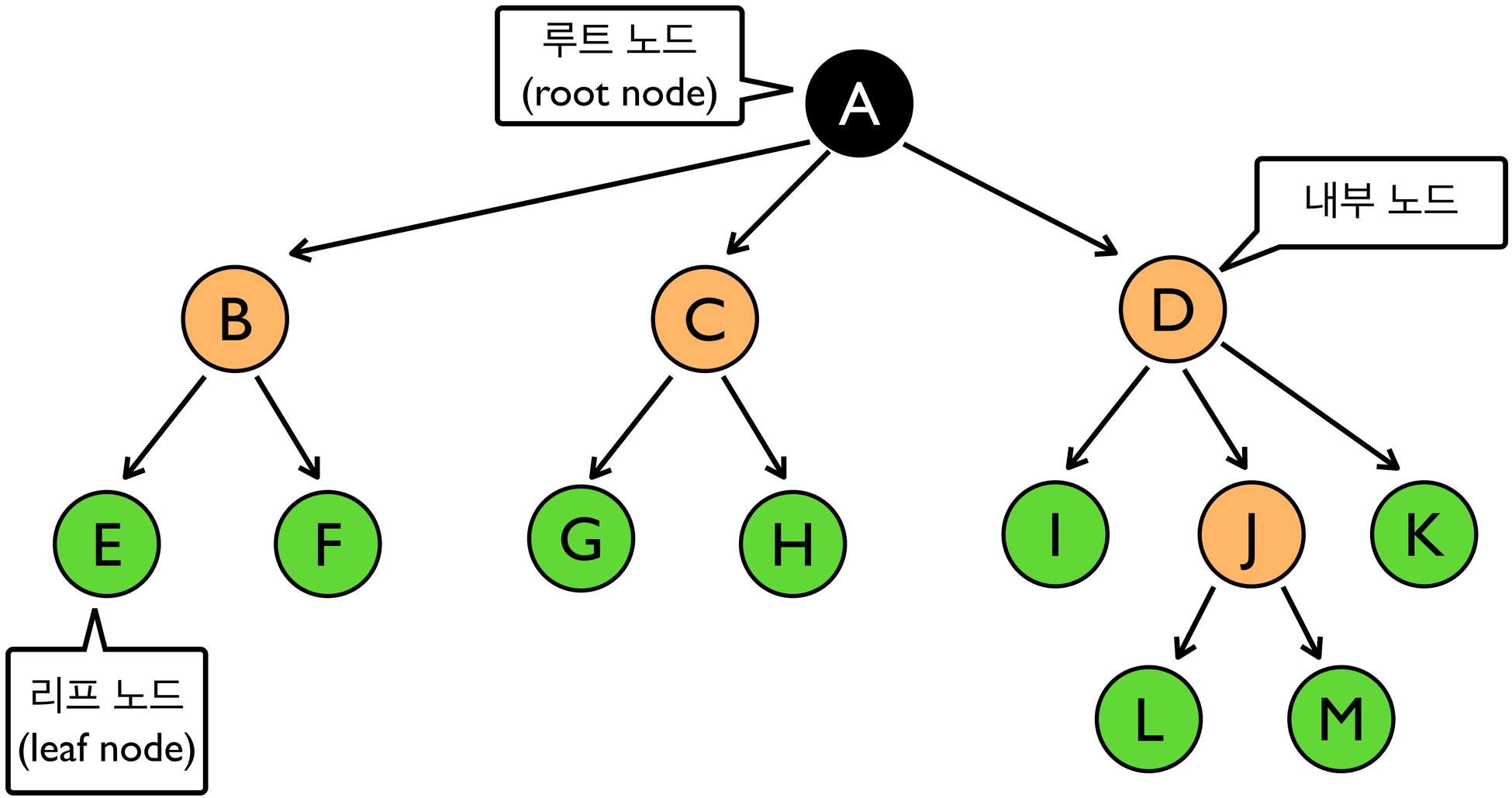
- 트리는 계층적 자료를 표현하는데 이용하는 비 선형 (non-linear) 자료구조

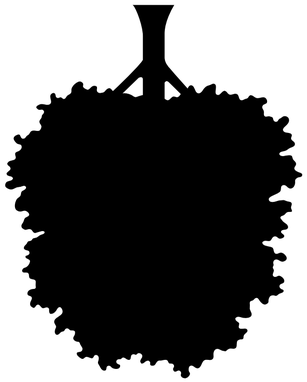
노드의 successor가 두개 이상일 수 있음





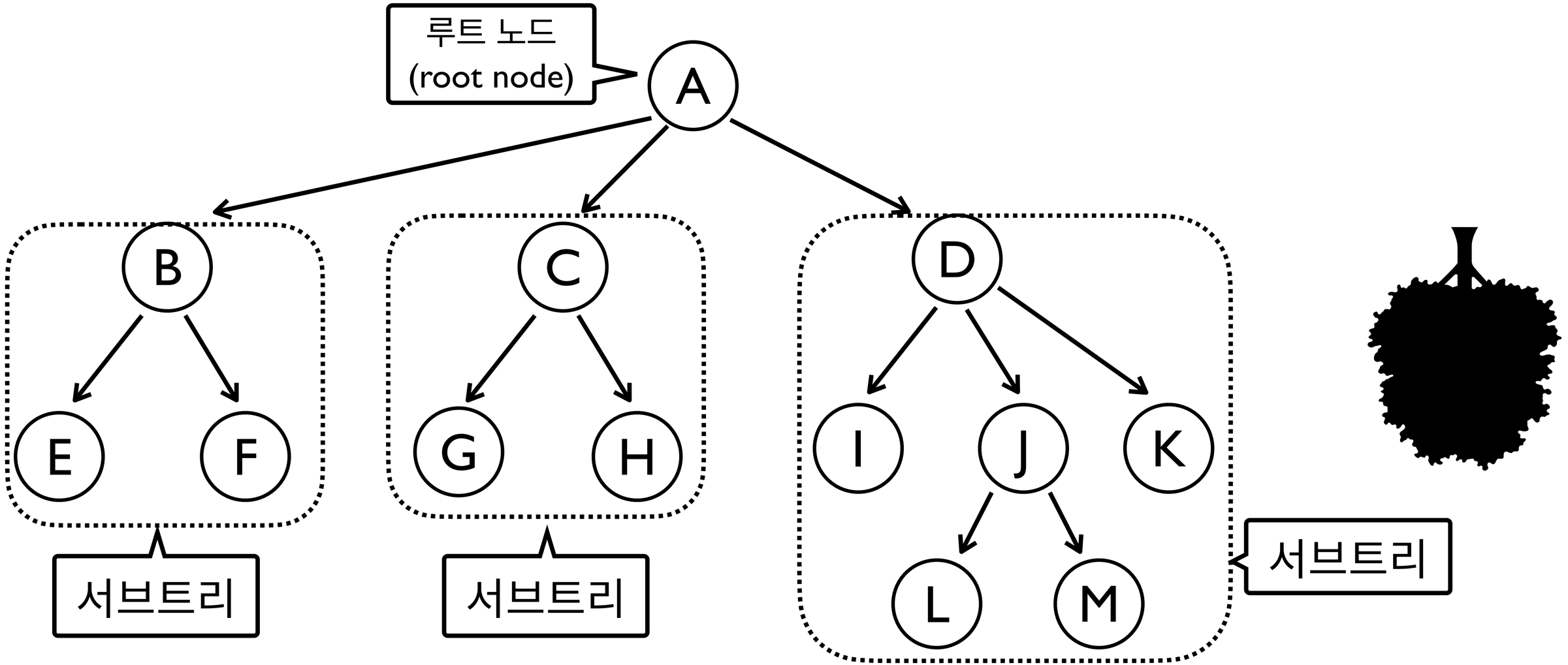
적합한 자료구조: 트리 (Tree)



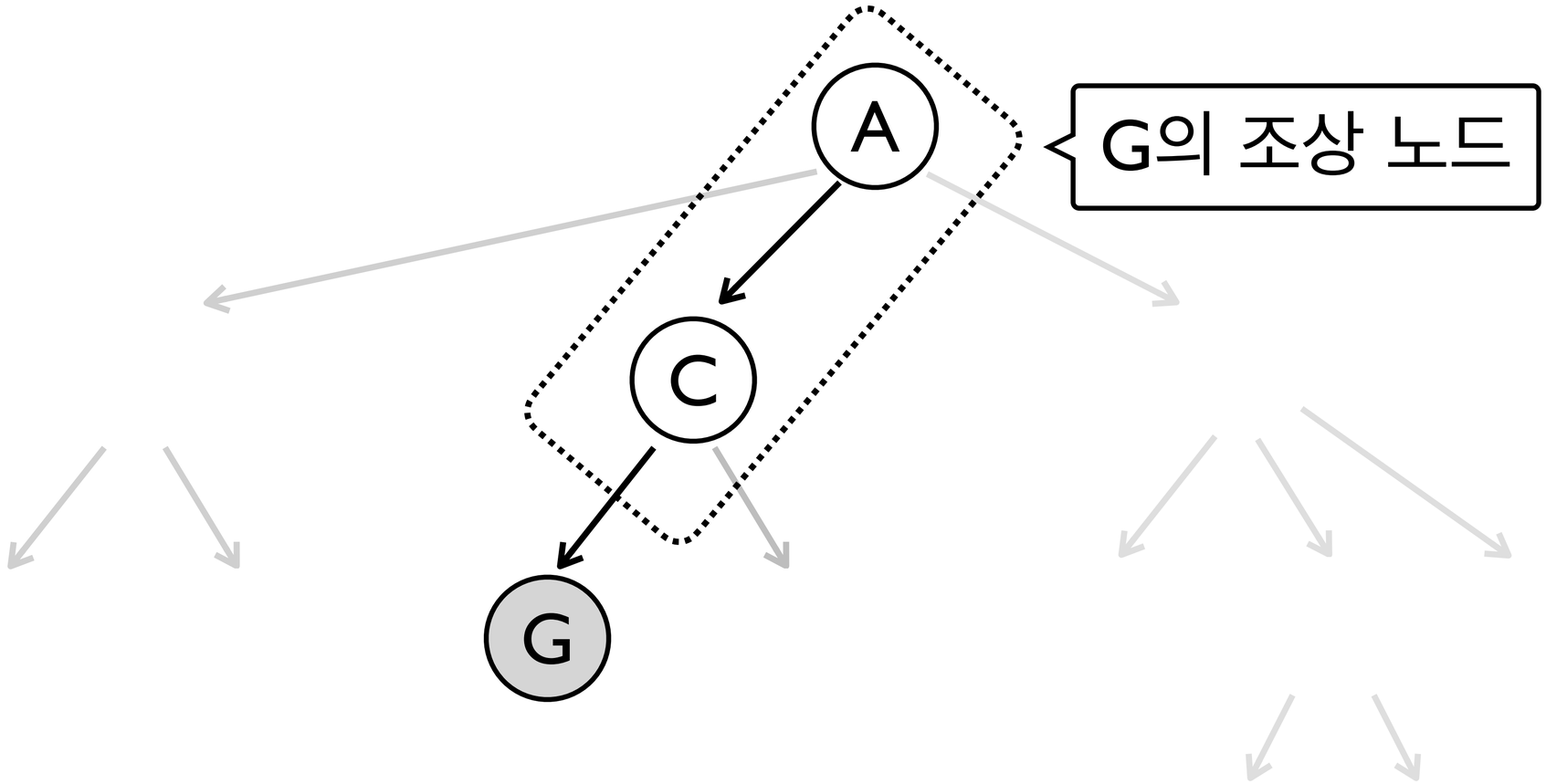


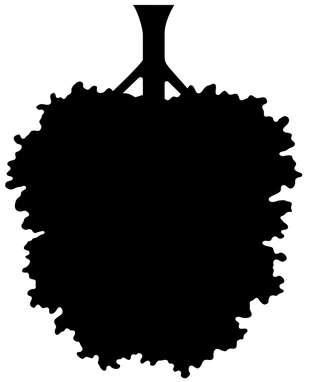
적합한 자료구조: 트리 (Tree)

- 트리의 각 노드는 0개 이상의 서브트리를 가짐

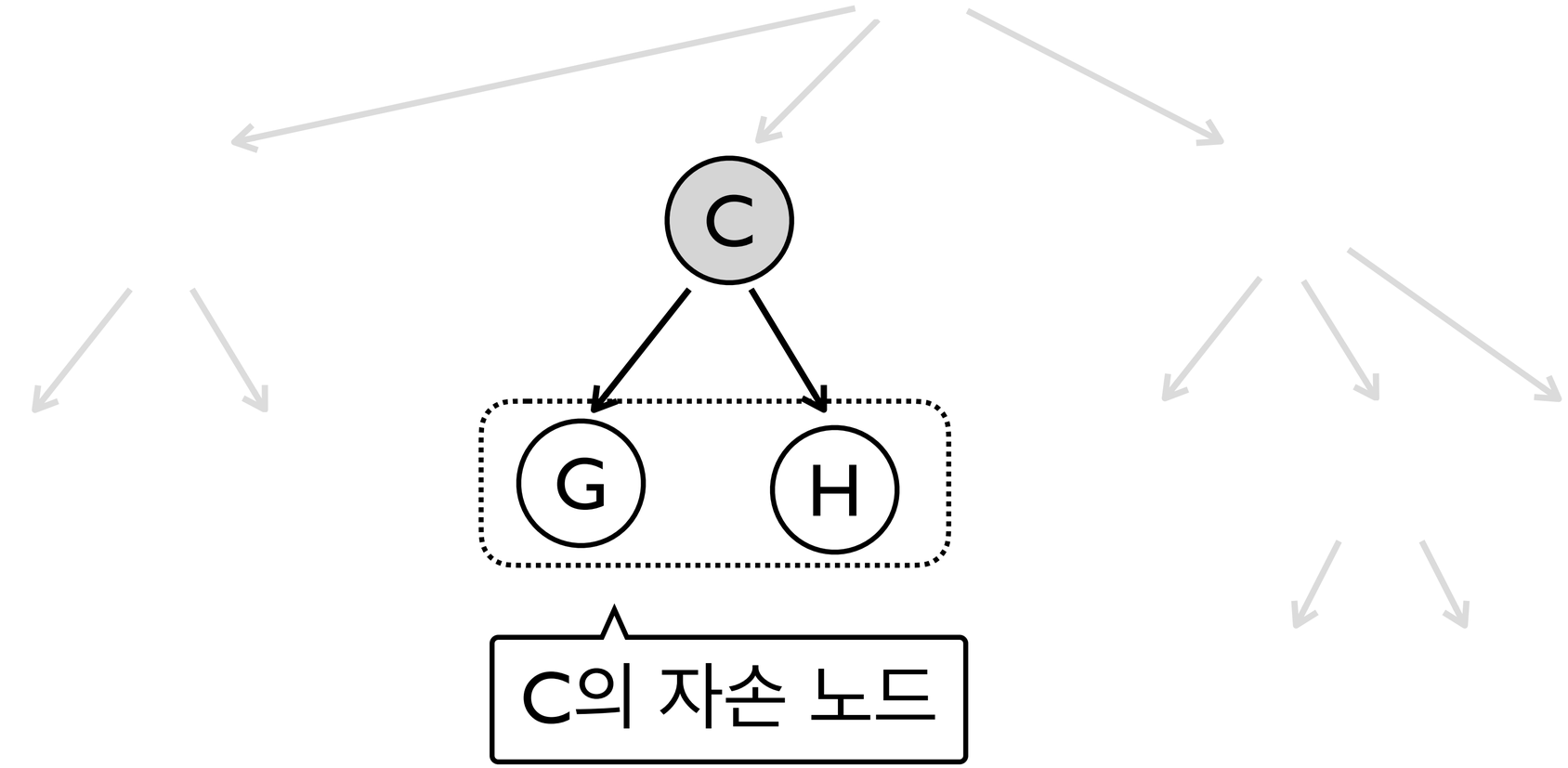


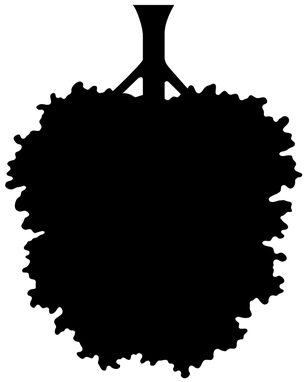
적합한 자료구조: 트리 (Tree)



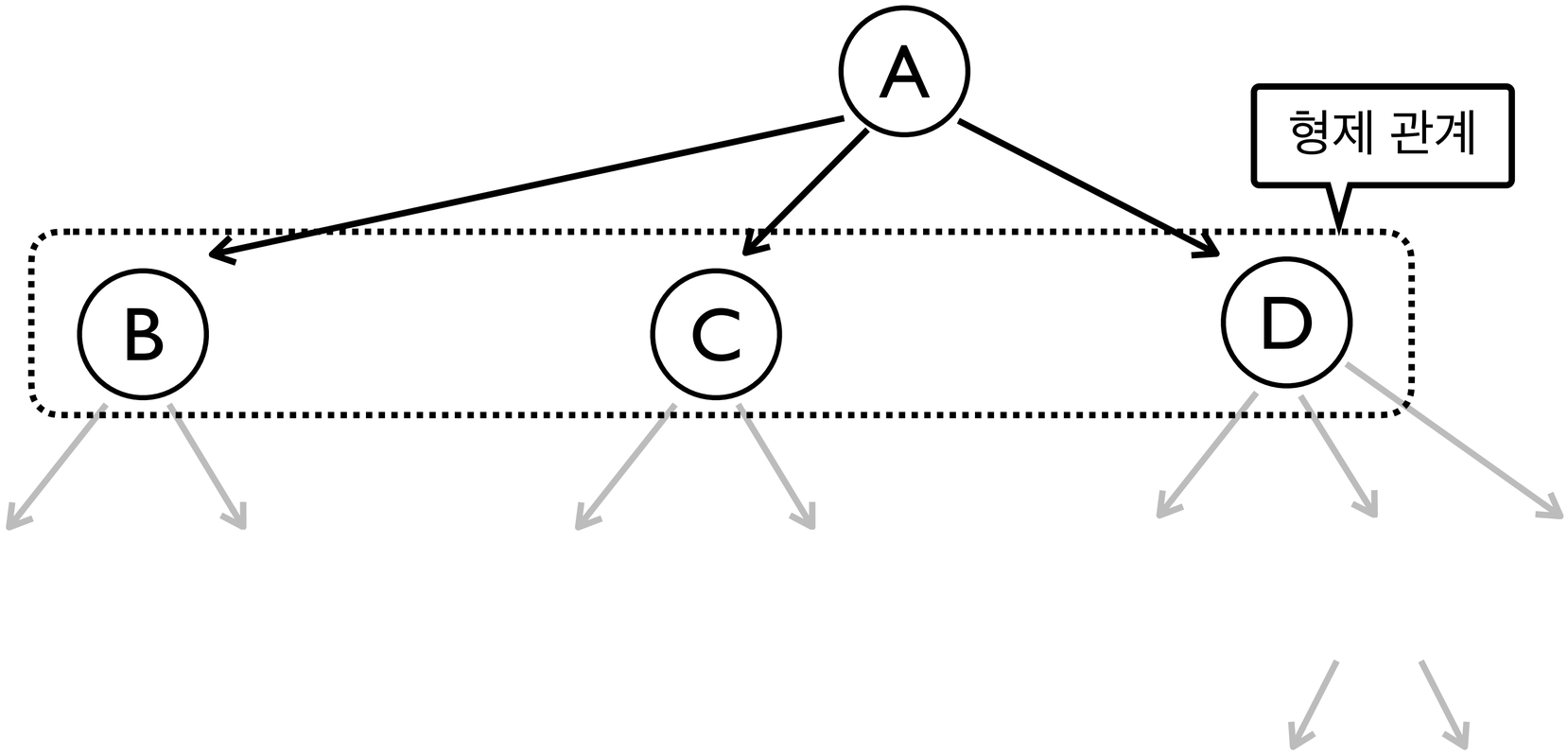


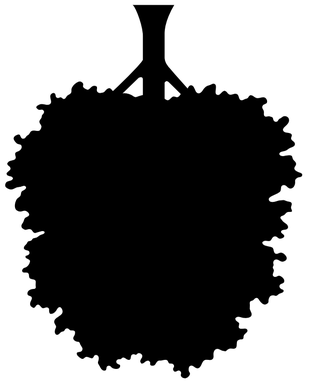
적합한 자료구조: 트리 (Tree)





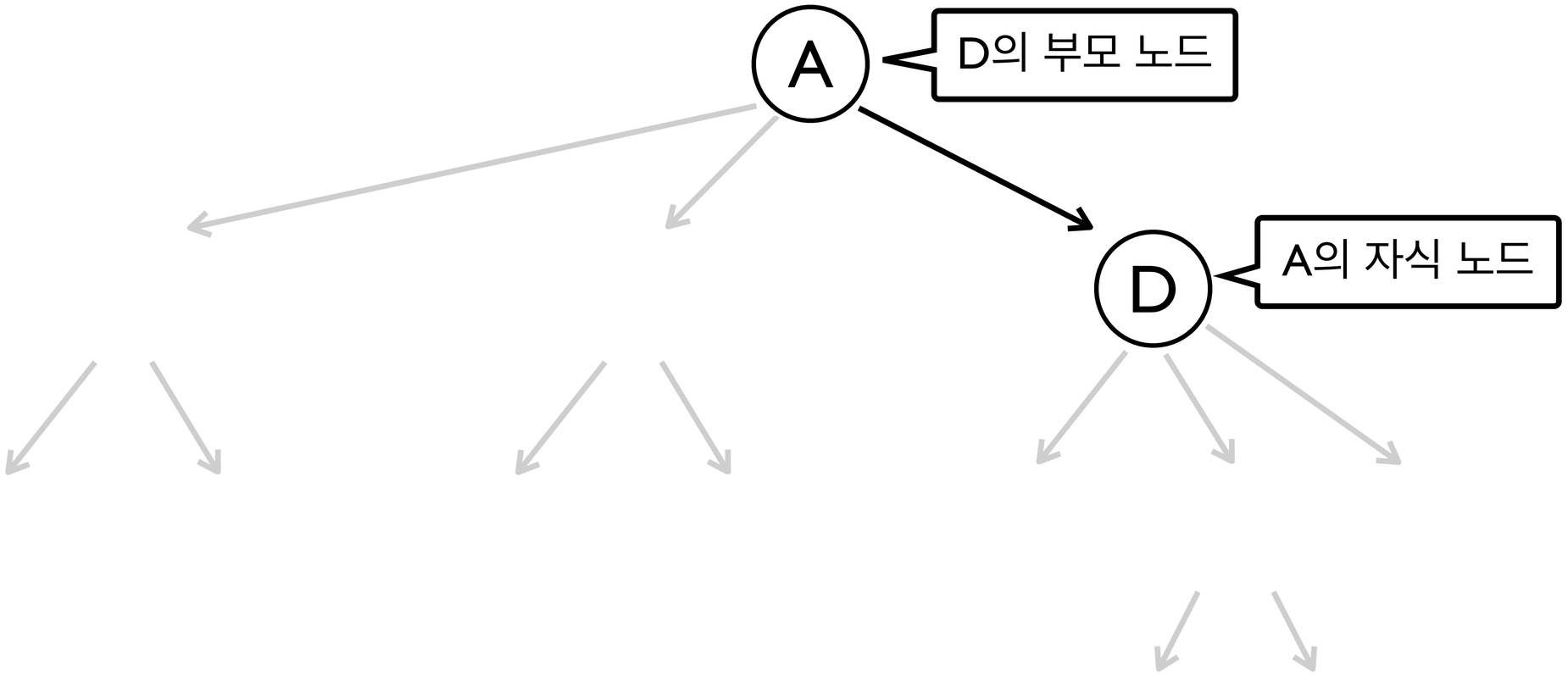
적합한 자료구조: 트리 (Tree)

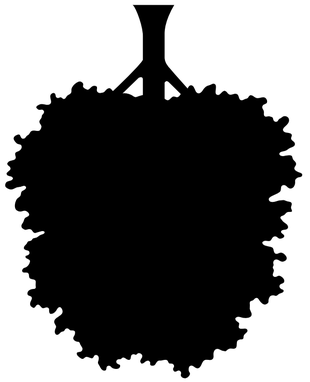




적합한 자료구조: 트리 (Tree)

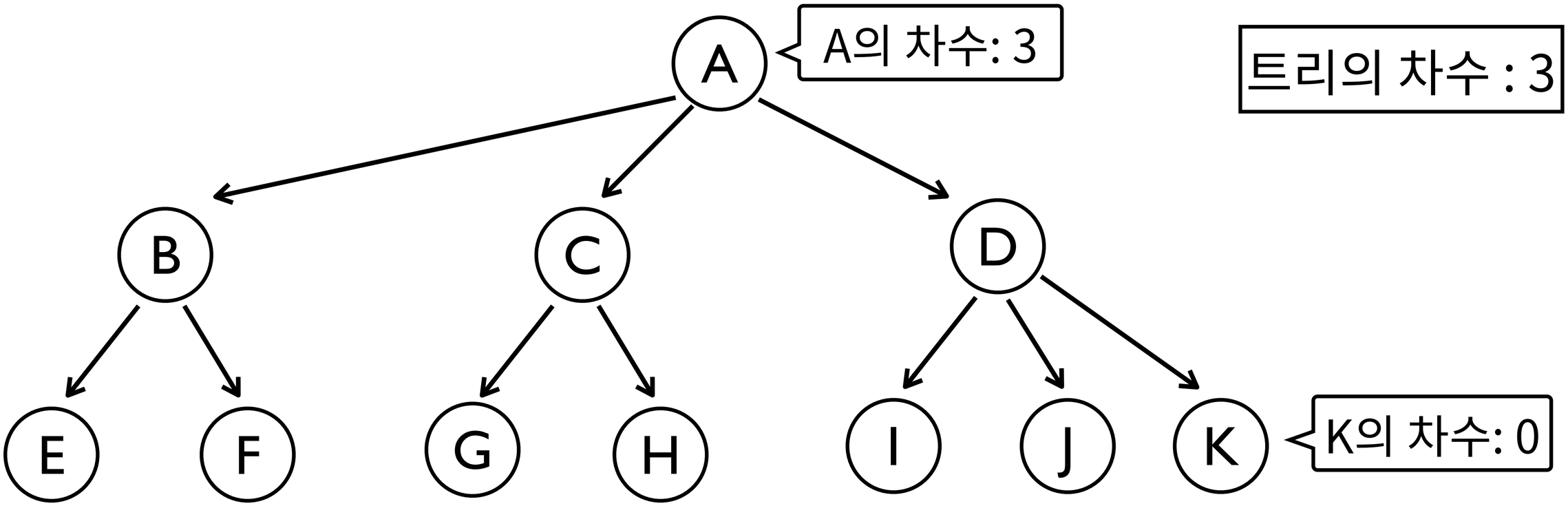
- 루트 노드를 제외한 트리의 모든 노드들은 단 한개의 부모 노드만을 가짐





적합한 자료구조: 트리 (Tree)

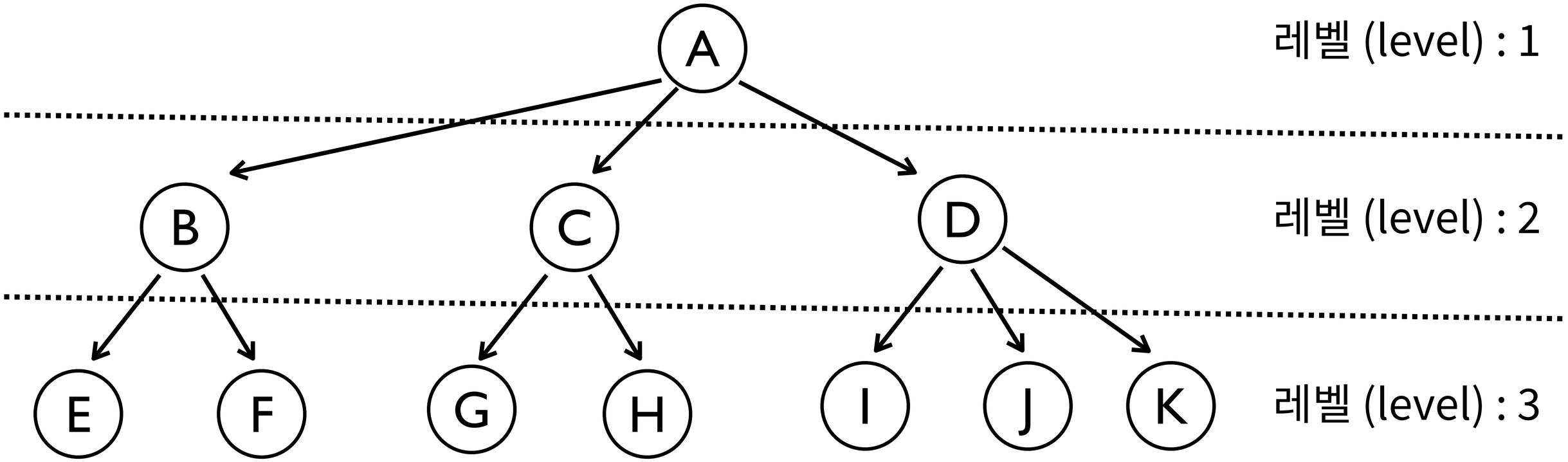
- 노드의 차수 (degree): 노드가 가진 자식 노드의 개수
- 트리의 차수: 가지고 있는 노드의 차수 중에서 가장 큰 차수

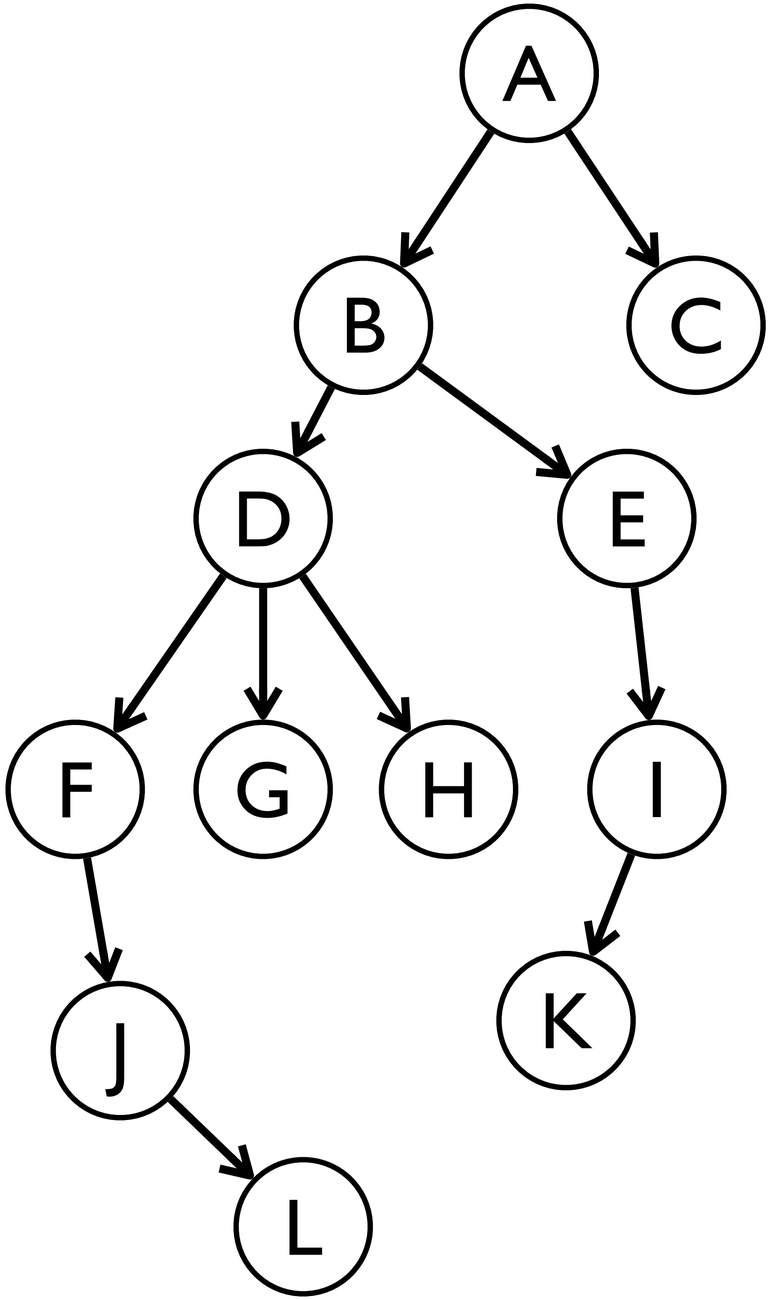


적합한 자료구조: 트리 (Tree)

- 레벨 (level) : 트리의 각 층에 번호를 매김 (루트의 레벨은 1)
- 트리의 높이 (height) : 트리가 가지고 있는 최대 레벨

트리의 높이 : 3





- 루트 노드:
- 리프 노드:
- 내부 노드:
- 노드 J의 조상 노드:
- 노드 D의 자손 노드:
- 노드 F의 형제 노드:
- 트리의 높이:
- 노드 D의 차수:
- 트리의 차수:
- 레벨 4에 위치한 노드:

트리 (Tree)

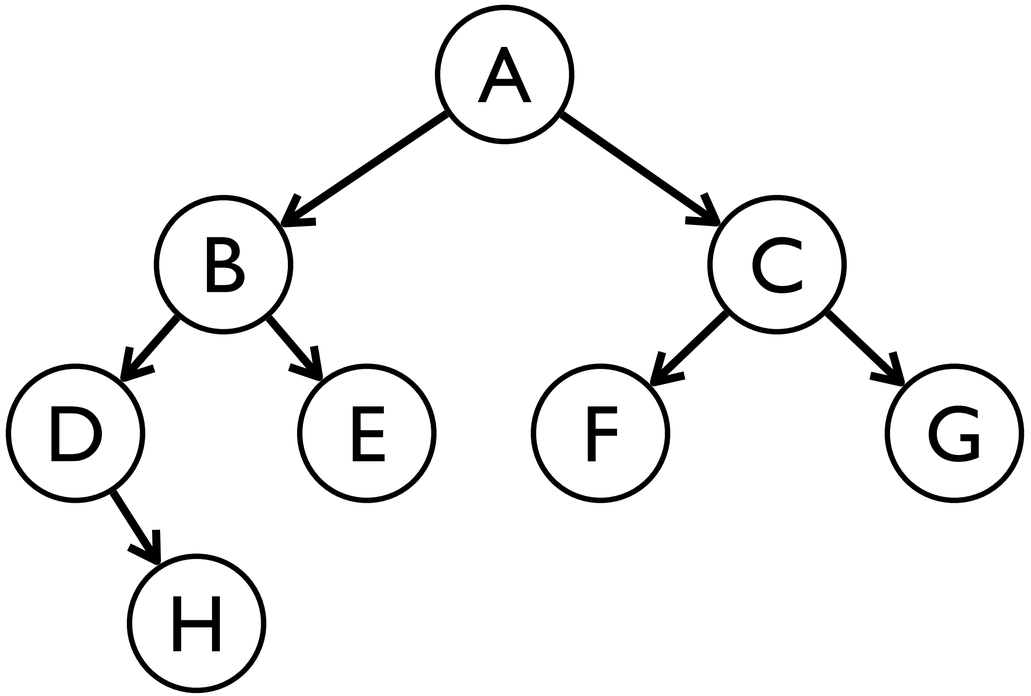
- 트리는 아래와 같이 재귀적(recursive)으로 정의됨

- 트리는 아래의 조건을 만족하는 노드의 집합
  (1) 공집합 이거나
  (2) 루트 노드가 하나 존재하고 루트 노드는 0개 이상의 (하위) 서브트리와 연결되어 있음. 서브트리 또한 트리의 정의를 만족함

- 트리는 아래의 조건을 만족하는 노드의 집합

  (1) 공집합 이거나

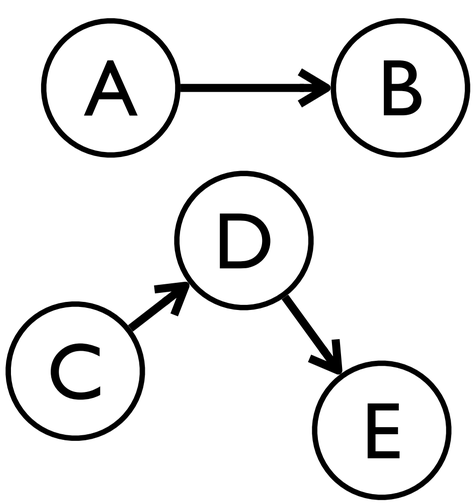
  (2) 루트 노드가 하나 존재하고 루트 노드는 0개 이상의 (하위) 서브트리와 연결되어 있음. 서브트리 또한 트리의 정의를 만족함



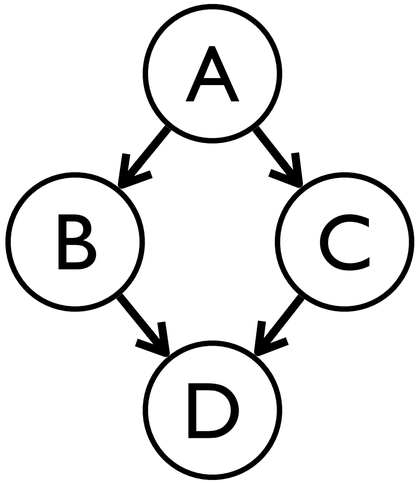
트리 예시

- 트리는 아래의 조건을 만족하는 노드의 집합
  (1) 공집합 이거나
  (2) 루트 노드가 하나 존재하고 루트 노드는 0개 이상의 (하위) 서브트리와 연결되어 있음. 서브트리 또한 트리의 정의를 만족함

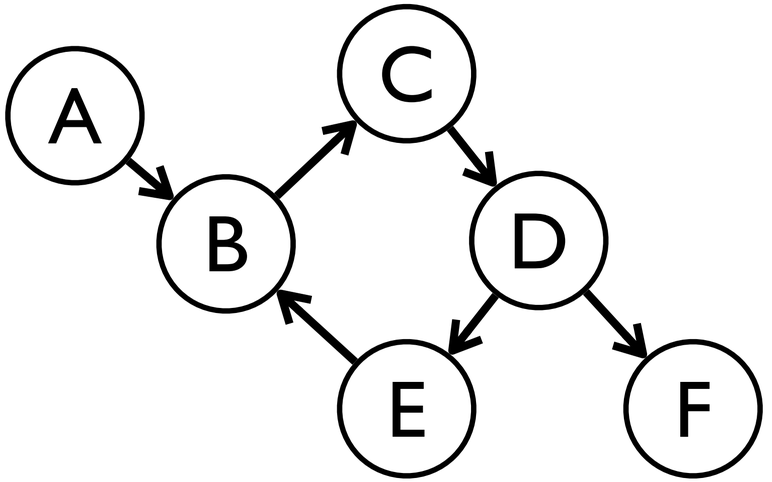
- 트리가 아닌 경우



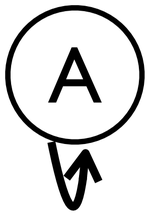
(a)



(b)



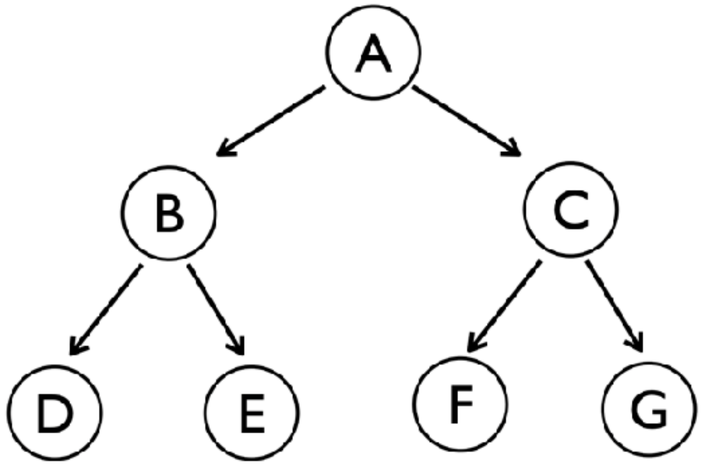
(c)



(c)

트리의 표현

(1) 노드를 이용한 표현

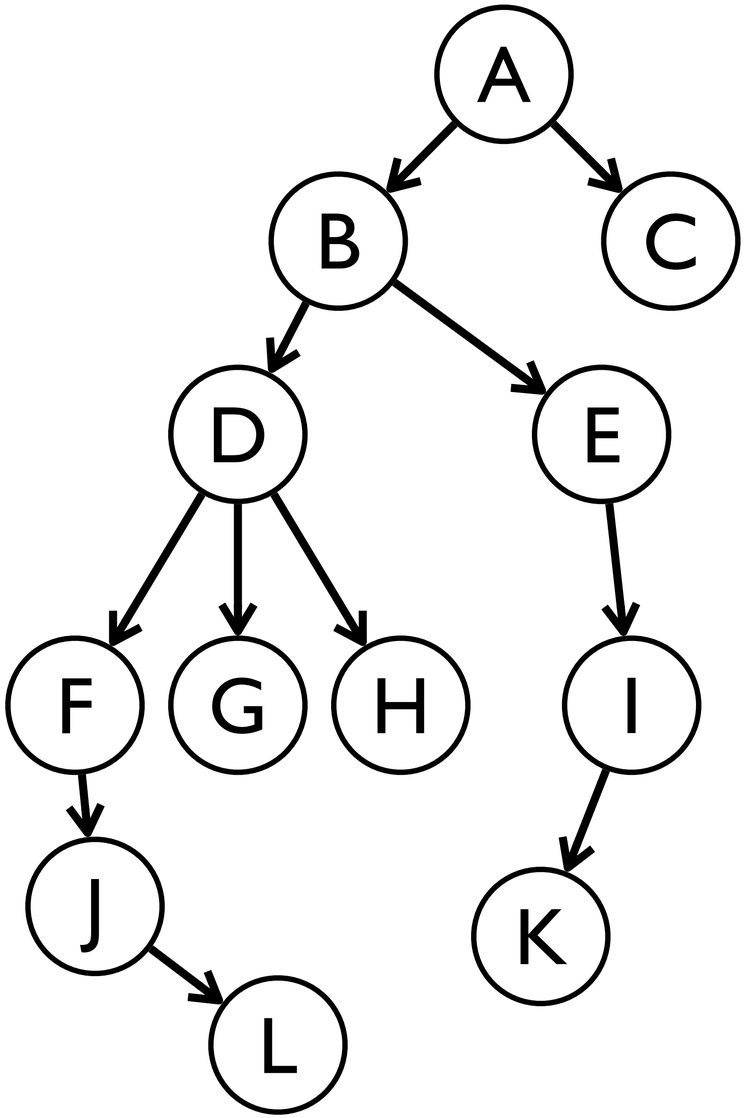


(2) 들여쓰기를 이용한 표현

```
A
  B
    D
    E
  C
    F
    G
```

(3) 괄호를 이용한 표현

A (B (D E) C (F G))



(1) 노드를 이용한 표현

(2) 들여쓰기를 이용한 표현

(3) 괄호를 이용한 표현

이진트리 (Binary Tree)

- 이진트리(binary tree)는 모든 노드가 2개의 서브트리를 갖는 트리
  - 모든 노드의 차수는 2 이하임 (최대 2개까지의 자식노드를 가실 수 있음)

- 이진트리(binary tree)의 정의는 아래와 같음

(1) 공집합(빈 트리)이거나

(2) 루트의 왼쪽 서브트리, 오른쪽 서브트리로 구성된 노드들의 유한집합.

(3) 이진트리의 서브트리들은 모두 이진트리여야 함.

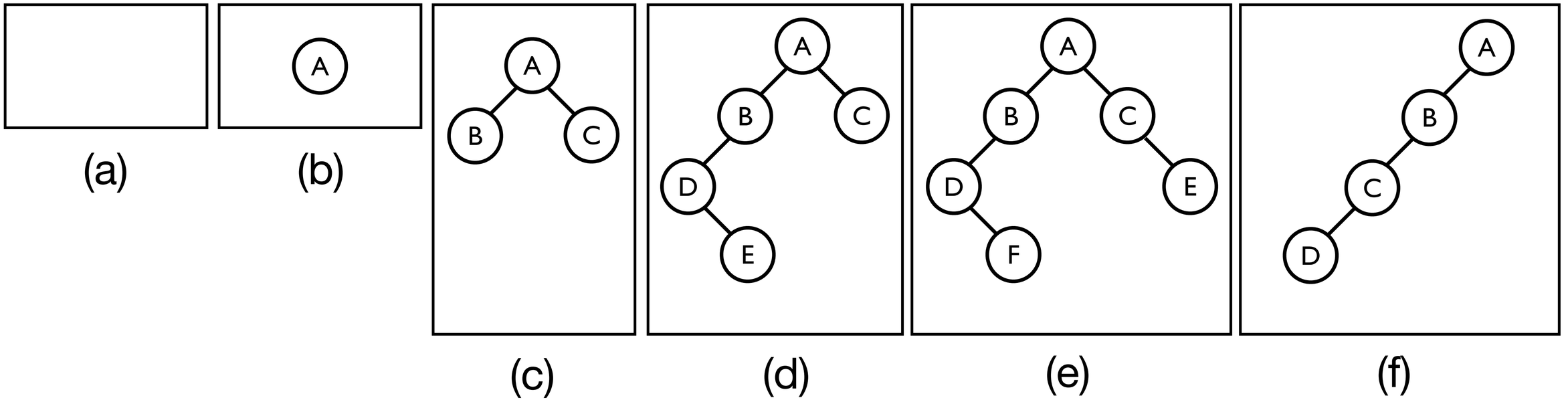
이진트리 (Binary Tree)

Definition

(1) 공집합(빈 트리)이거나

(2) 루트의 왼쪽 서브트리, 오른쪽 서브트리로 구성된 노드들의 유한집합.

(3) 이진트리의 서브트리들은 모두 이진트리여야 함.



이진트리 (Binary Tree)

- 이진트리의 성질

(1) n개의 노드를 가진 트리는 n-1개의 간선을 가짐

- 루트를 제외한 트리의 모든 노드가 하나의 부모 모드를 가지기 때문

(2) 높이가 h인 이진트리는 h개 이상, $2^h - 1$개 이하의 노드를 가짐

- 한 레벨에는 적어도 하나의 노드는 존재해야 함
- 하나의 노드는 최대 2개의 자식을 가질 수 있음으로 레벨 i에서 최대 2^{i-1}의 노드를 가짐
  - 높이가 h인 이진트리의 최대 노드의 개수는 $\sum_{i=1}^{h} 2^{i-1} = 2^h - 1$

이진트리 (Binary Tree)

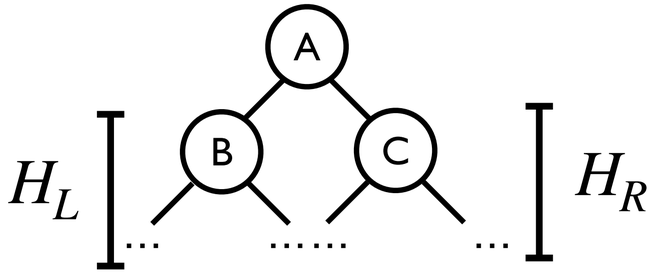
- 이진트리의 성질

(3) n개의 노드를 가지는 이진트리의 높이는 $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ 이상이고 n 이하이다.

- 한 레벨에는 적어도 하나의 노드는 존재해야 하므로 높이는 n을 넘을 수 없음
- 높이가 h인 이진트리가 가질 수 최대 노드의 개수는 $2^h - 1$임 (i.e., $n \leq 2^h - 1$)

이진트리 (Binary Tree)

- 균형(Balance)
  - 이진 트리의 왼쪽 서브트리와 오른쪽 서브트리의 높이를 각각 H_L과 H_R라 하자



  - 이 때 균형 인수 (balance factor) B는 아래와 같이 정의됨

$$B = H_L - H_R$$

  - B의 값이 -1, 0, 1이면 균형을 이룬 트리라 함 (balanced tree)

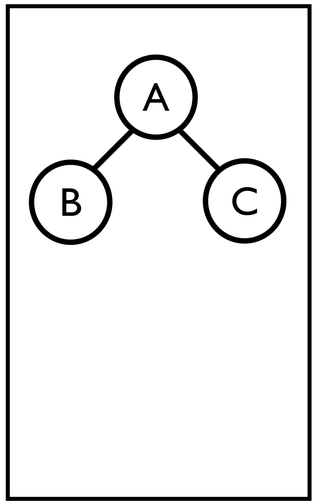
B = 0 :

B < 0 :

B > 0 :

이진트리 (Binary Tree)

- 균형(Balance)

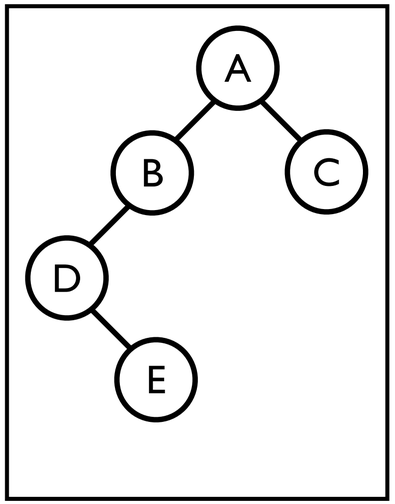


(a)

H_L :

H_R :

B :

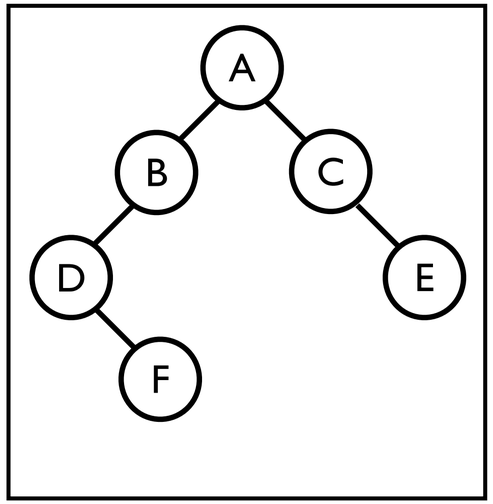


(b)

H_L :

H_R :

B :

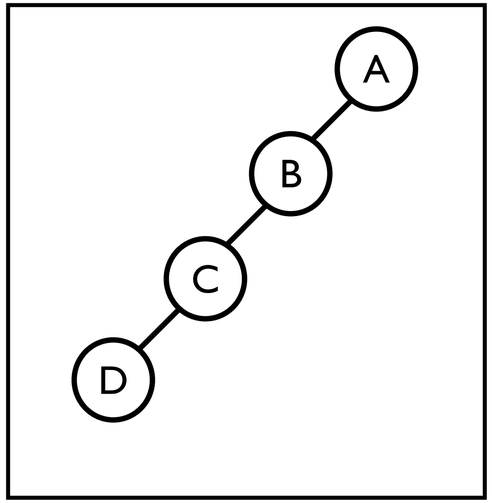


(c)

H_L :

H_R :

B :



(d)

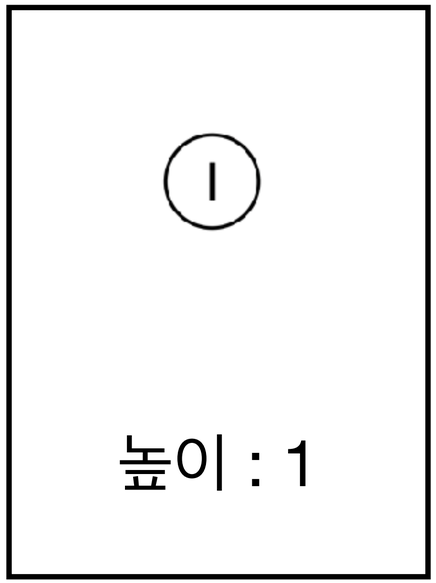
H_L :

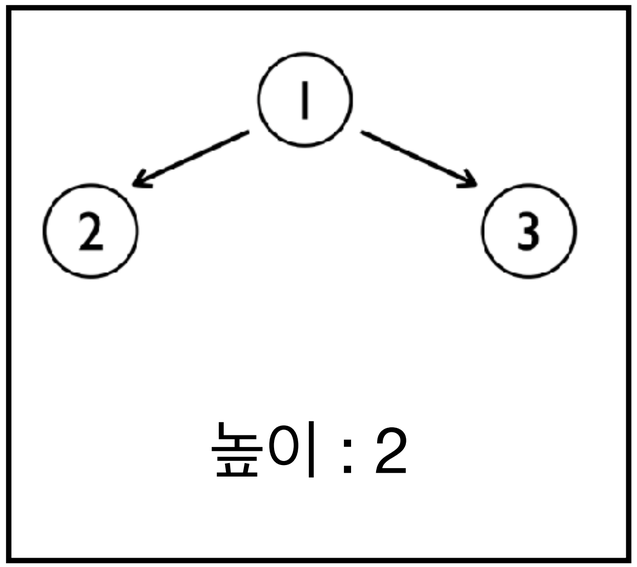
H_R :

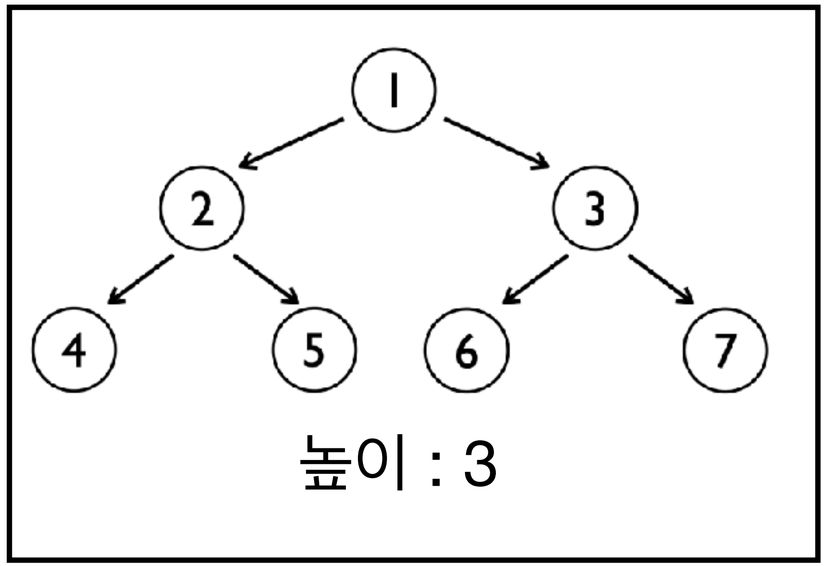
B :

포화 이진트리 (Full Binary Tree)

- 트리의 각 레벨에 노드가 꽉 차있는 이진트리







...

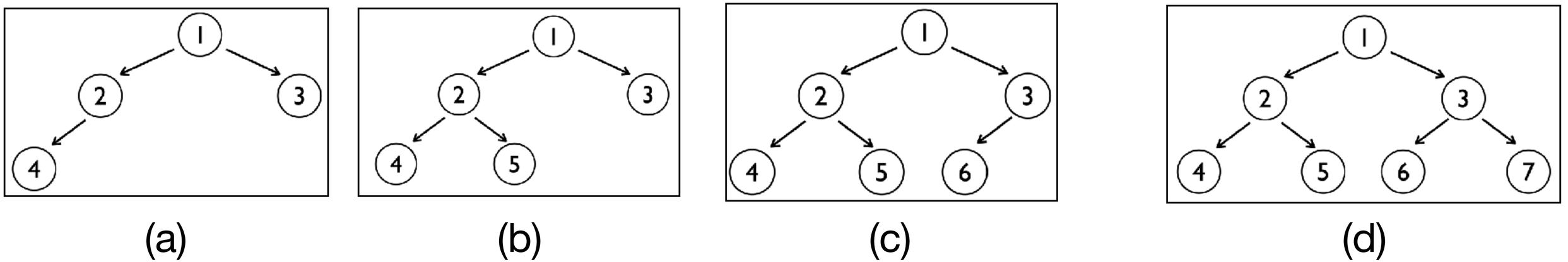
포화 이진트리 (Full Binary Tree)

- 트리의 각 레벨에 노드가 꽉 차있는 이진트리
- 포화 이진트리의 특징
  - 모든 내부 노드들이 두개의 자식 노드들을 가짐
  - 모든 리프 노드들은 같은 레벨에 위치함
  - n개의 노드가 있을 때, 포화 이진트리의 높이 h는 $\log_2(n+1)$임
  - 높이가 h일 경우 노드의 개수는 항상 $2^h - 1$임

완전 이진트리 (Complete Binary Tree)

(1) 높이가 k인 트리에서 레벨 1부터 $k-1$까지는 노드가 모두 채워져 있고

(2) 마지막 레벨 k에서는 왼쪽부터 오른쪽으로 노드가 순서대로 채워져 있는 이진트리

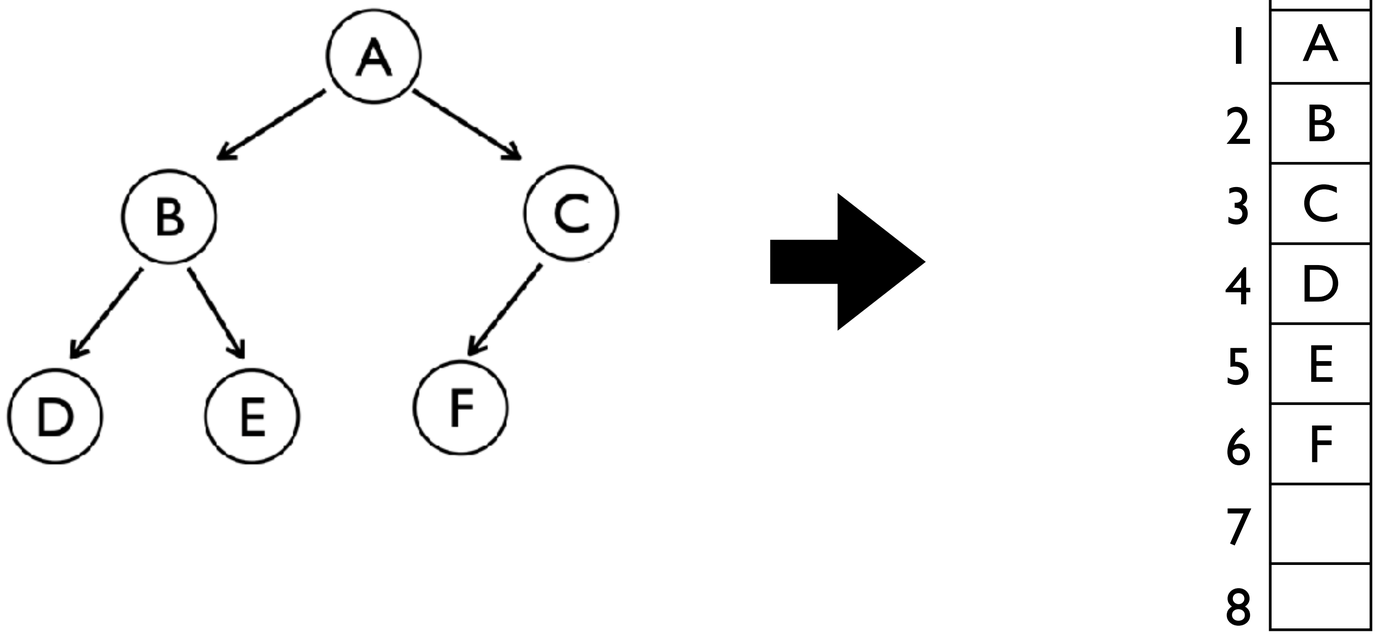


(a) (b) (c) (d)

높이가 3인 완전 이진트리들

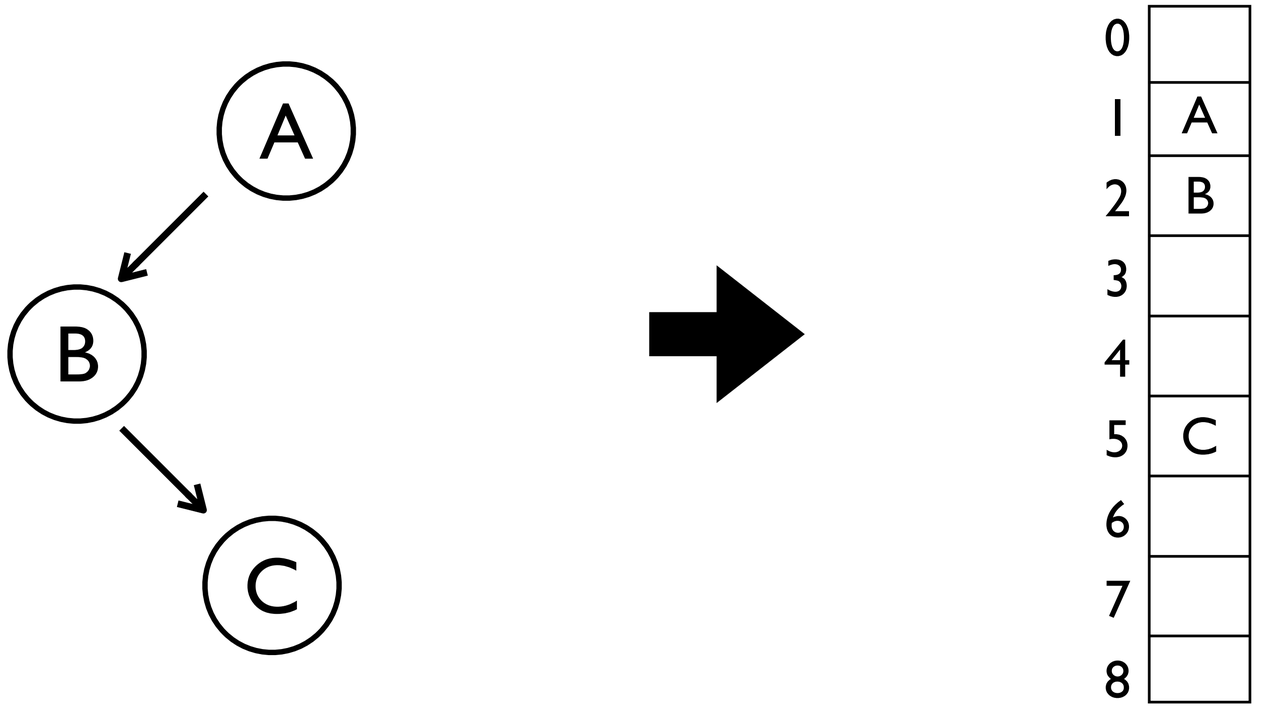
이진트리의 구현

- 배열(Array) 표현법
  - 이진트리가 완전 이진트리라고 가정하고 높이가 k이면 $2^k - 1$개의 연속적인 공간으로 표현



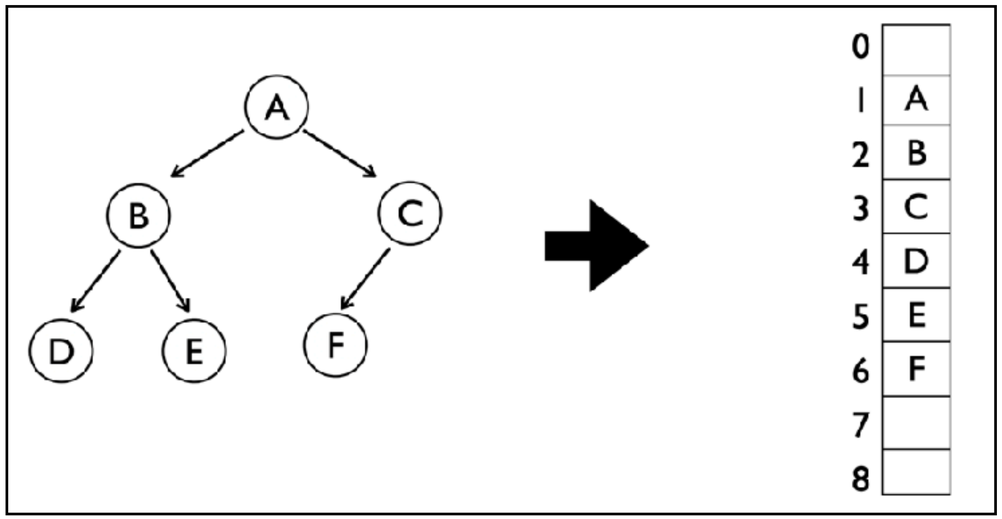
이진트리의 구현

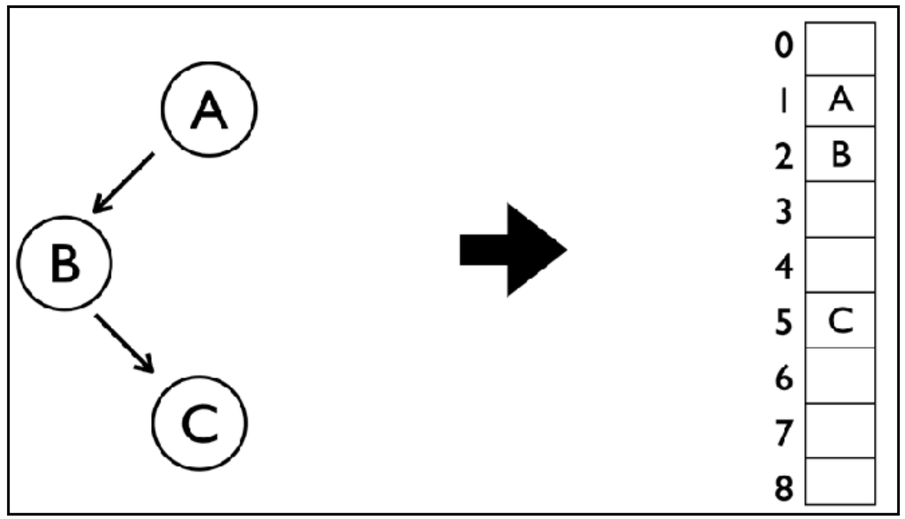
- 배열(Array) 표현법
  - 이진트리가 완전 이진트리라고 가정하고 높이가 k이면 $2^k - 1$개의 연속적인 공간으로 표현
  - 완전 이진트리가 아닌 일반 이진트리도 배열로 표현할 수 있음



이진트리의 구현

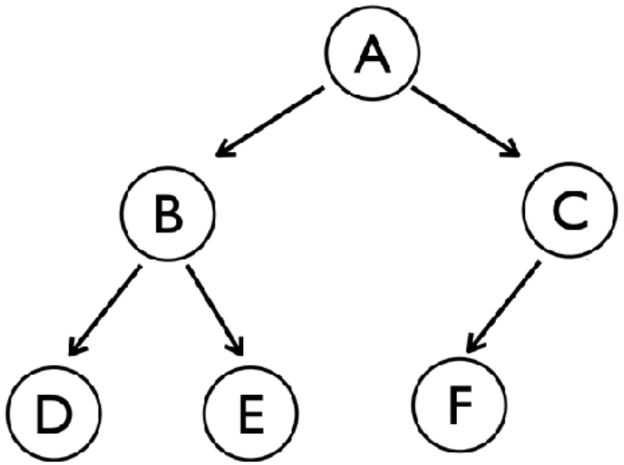
- 배열(Array) 표현법
- 부모와 자식의 인덱스 사이에는 다음과 같은 공식이 성립함
  - 노드의 인덱스가 i일 때 부모 노드의 인덱스 = i/2
  - 인덱스가 i인 노드의 왼쪽 자식 노드의 인덱스 = 2i
  - 인덱스가 i인 노드의 오른쪽 자식 노드의 인덱스 = 2i + 1

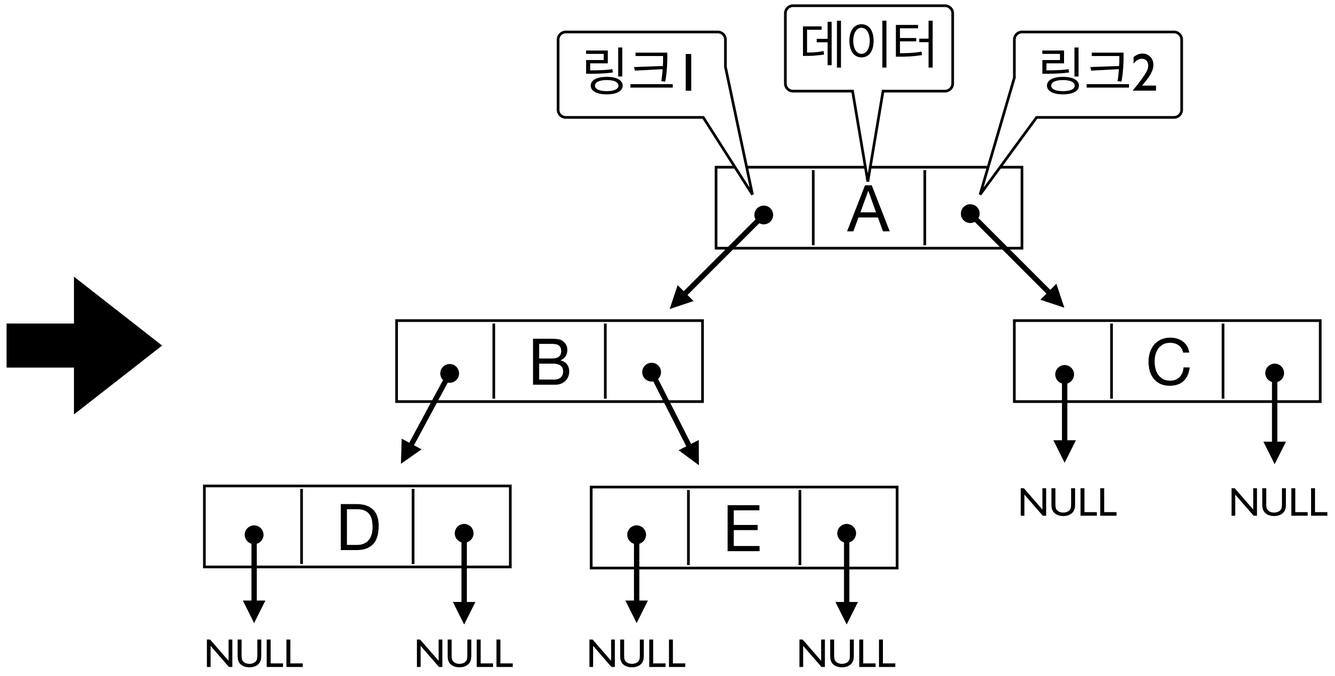




이진트리의 구현

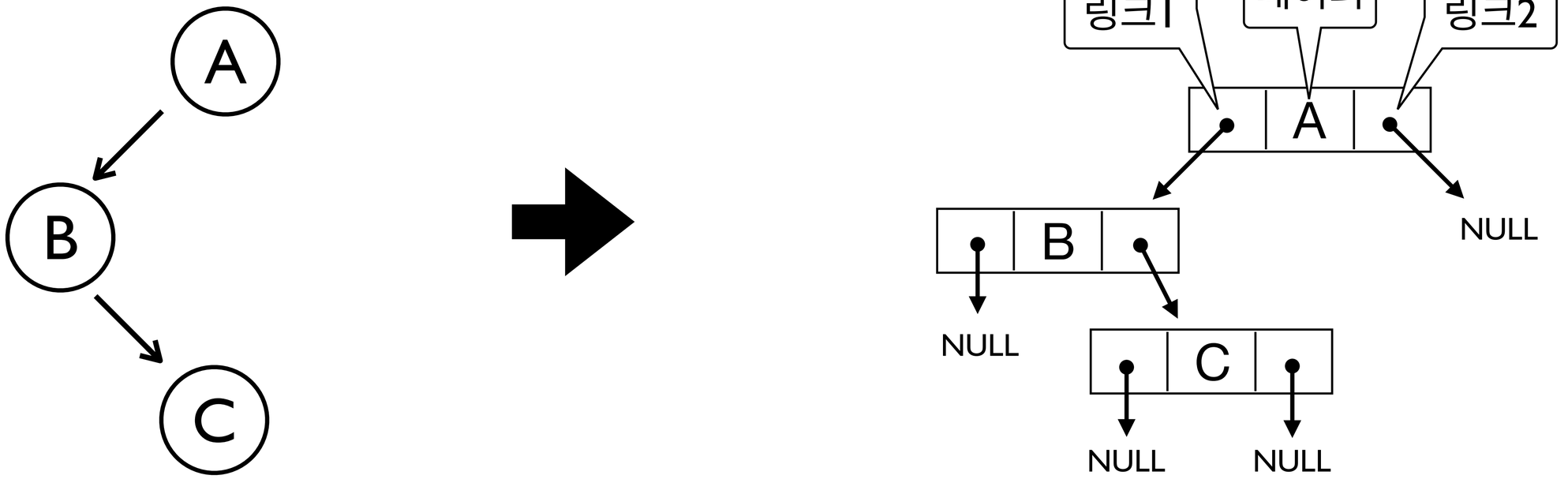
- 링크 표현법
  - 링크 표현법은 연결 리스트와 유사함
  - 이진 트리의 노드는 데이터와 두개의 링크를 가짐





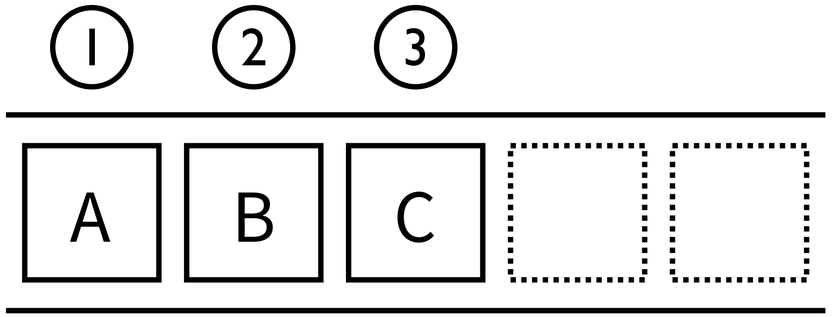
이진트리의 구현

- 링크 표현법
  - 링크 표현법은 연결 리스트와 유사함
  - 이진 트리의 노드는 데이터와 두개의 링크를 가짐

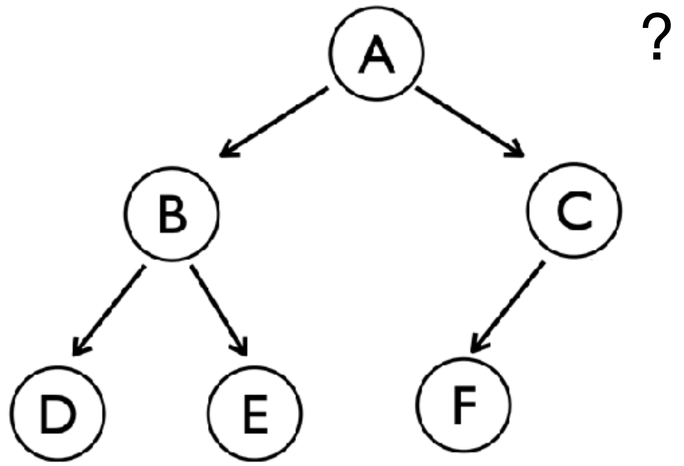


이진트리의 순회

- 트리를 순회(traversal)한다는 것은 모든 노드를 한 번씩 방문하여 가지고 있는 데이터를 목적에 맞게 처리하는 것을 의미함



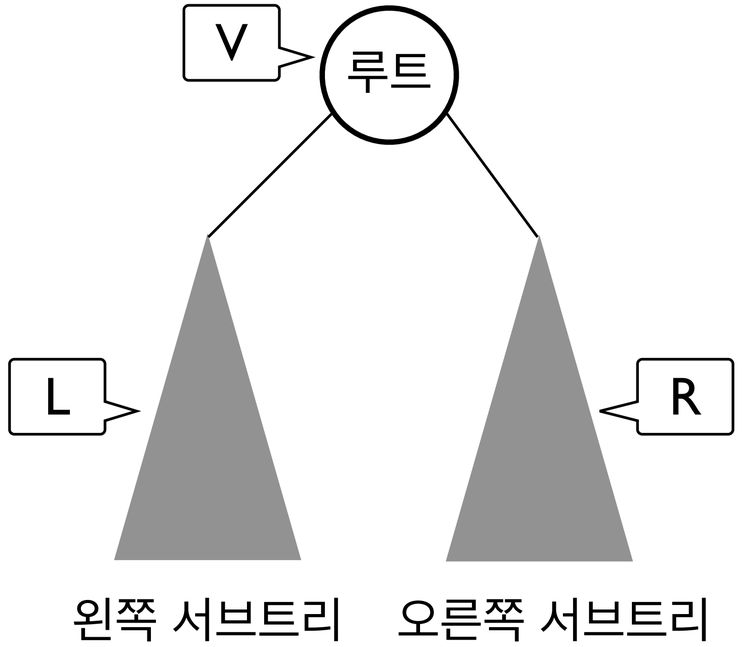
큐(선형 자료구조)에서의 순회



(b) 이진트리(비선형 자료구조)에서의 순회

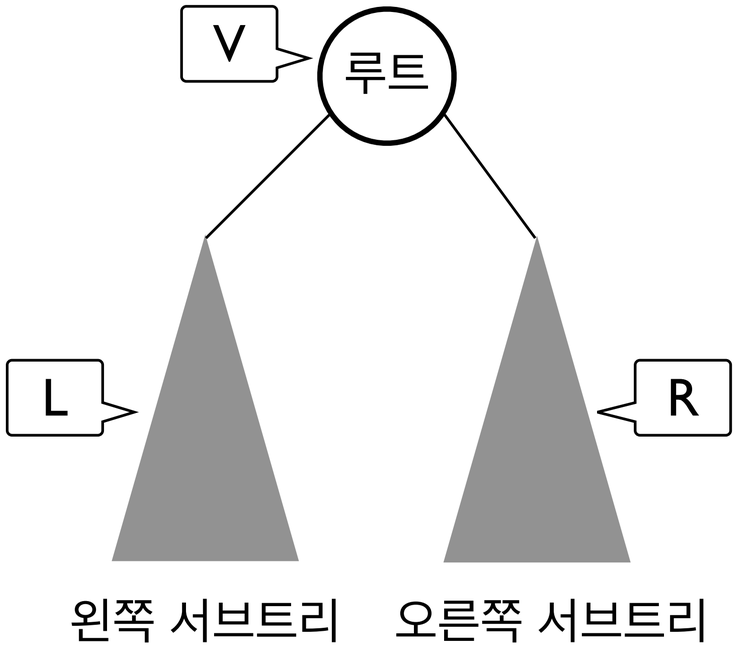
이진트리의 순회

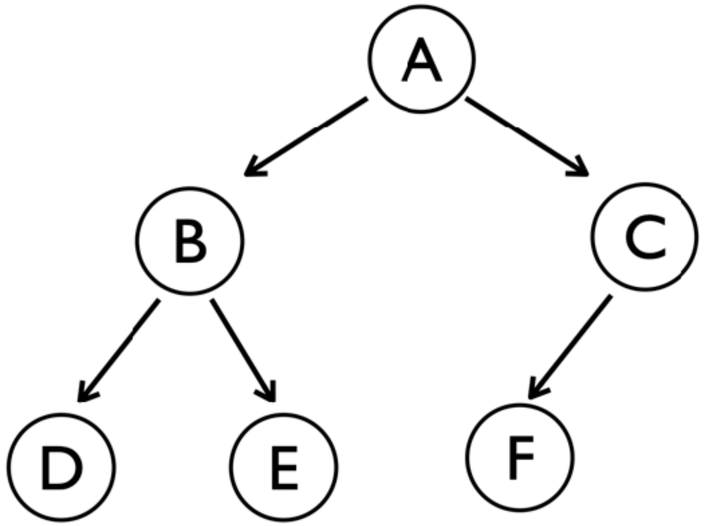
- 이진트리를 순회하는 표준적인 방법에는 전위, 중위, 후위의 3가지 방법이 있음
  - 루트와 왼쪽 서브트리, 오른쪽 서브트리를 각각 어떤 순서로 방문하느냐에 따라 구분함
  - 만약 루트를 방문하는 작업을 V, 왼쪽 서브트리 방문을 L, 오른쪽 서브트리 방문을 R이라고 했을 때
    - 전위순회 (preorder traversal) : VLR 순으로 처리
    - 중위순회 (inorder traversal) : LVR 순으로 처리
    - 후위순회 (postorder traversal) : LRV 순으로 처리



이진트리의 순회

- 전위순회 (preorder traversal) : VLR 순으로 처리



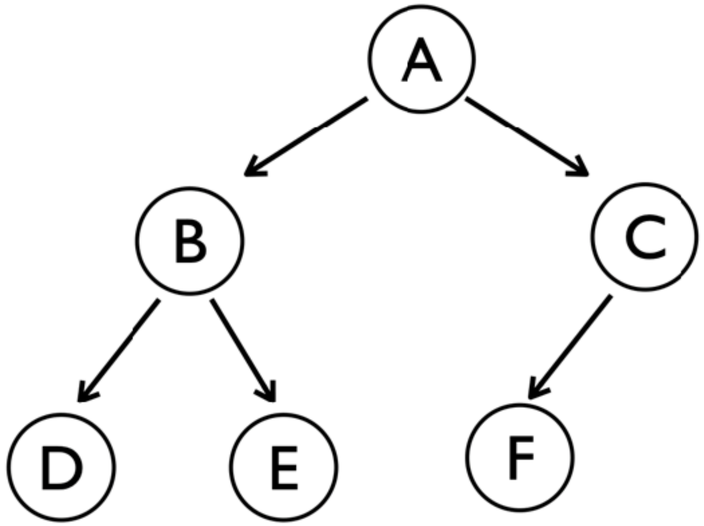


이진트리의 순회

- 전위순회 (preorder traversal) : VLR 순으로 처리

```
procedure preorderTraversal(node)
    if node is not null then
        process(node)
        preorderTraversal(node.left)
        preorderTraversal(node.right)
    end if
end procedure
```

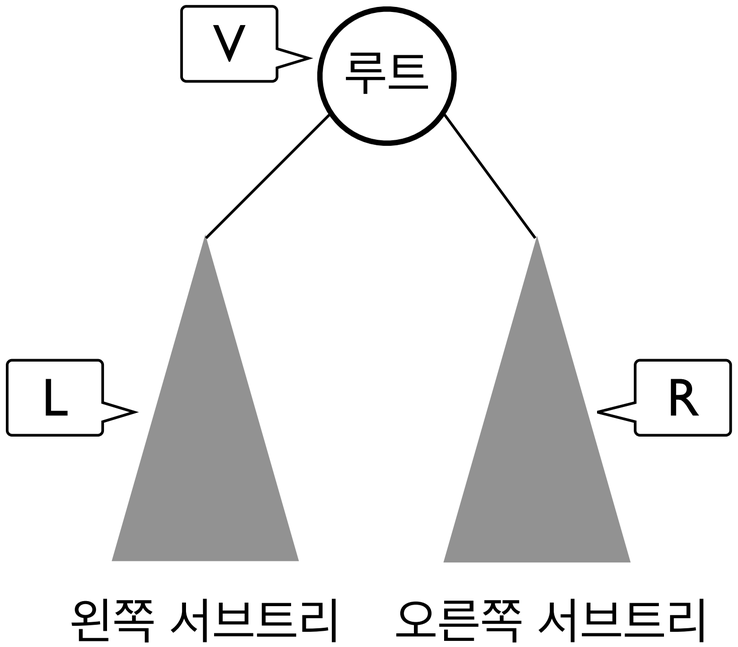
슈도 코드

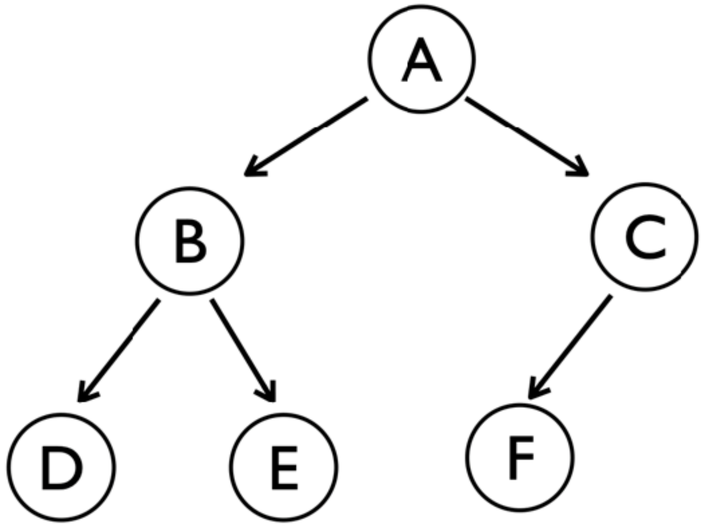


A -> B -> D -> E -> C -> F

이진트리의 순회

- 중위순회 (inorder traversal) : LVR 순으로 처리



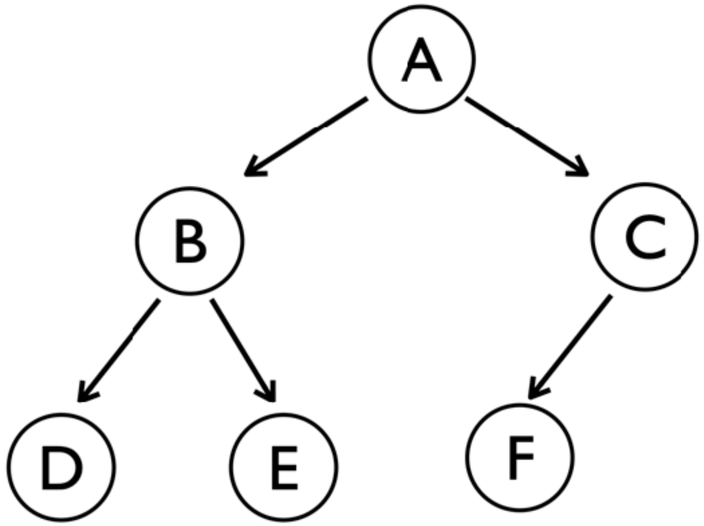


이진트리의 순회

- 중위순회 (inorder traversal) : LVR 순으로 처리

```
procedure inorderTraversal(node)
    if node is not null then
        inorderTraversal(node.left)
        process(node)
        inorderTraversal(node.right)
    end if
end procedure
```

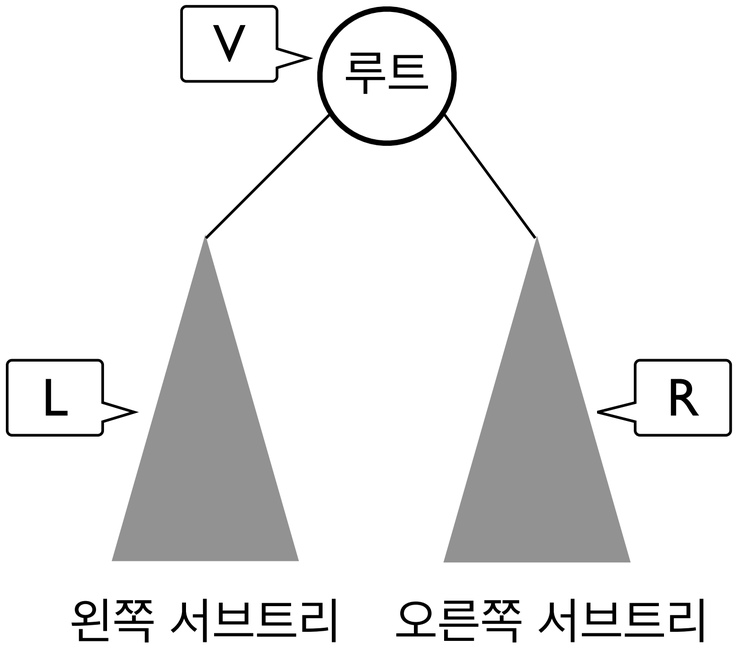
슈도 코드

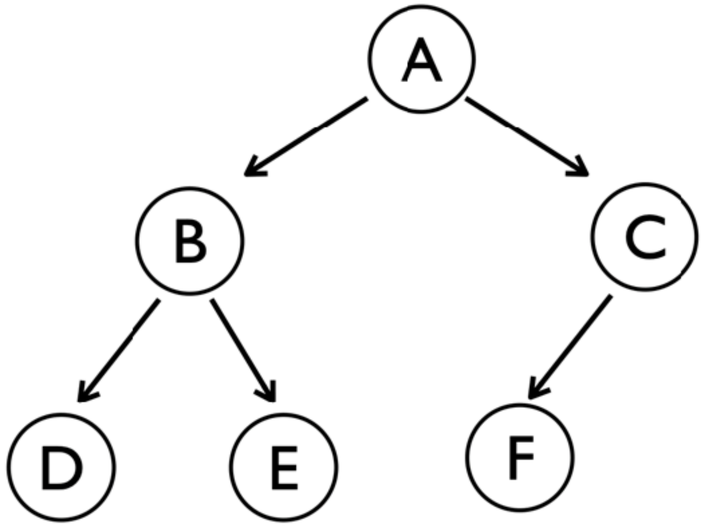


D -> B -> E -> A -> F -> C

이진트리의 순회

- 후위순회 (postorder traversal) : LRV 순으로 처리



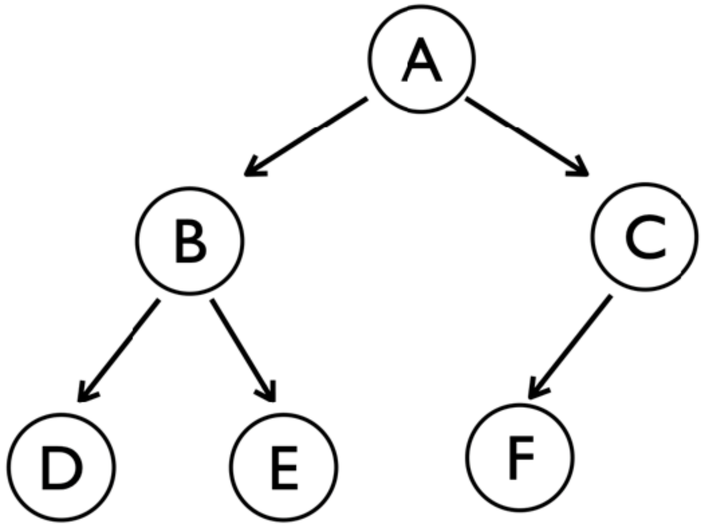


이진트리의 순회

- 후위순회 (postorder traversal) : LRV 순으로 처리

```
procedure postorderTraversal(node)
    if node is not null then
        postorderTraversal(node.left)
        postorderTraversal(node.right)
        process(node)
    end if
end procedure
```

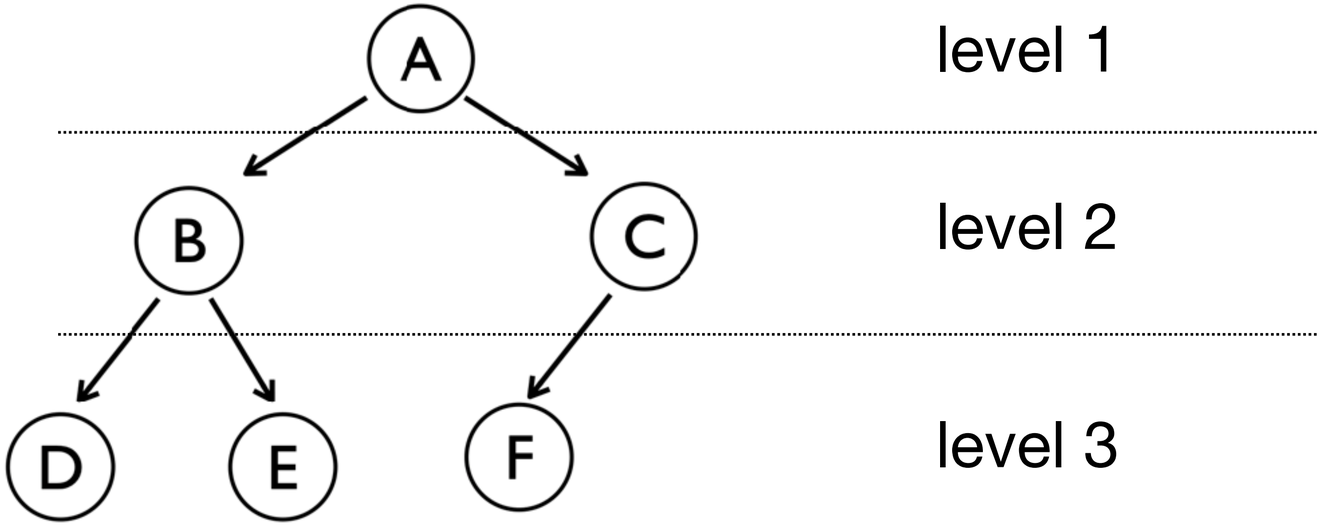
슈도 코드



D -> E -> B -> F -> C -> A

이진트리의 순회

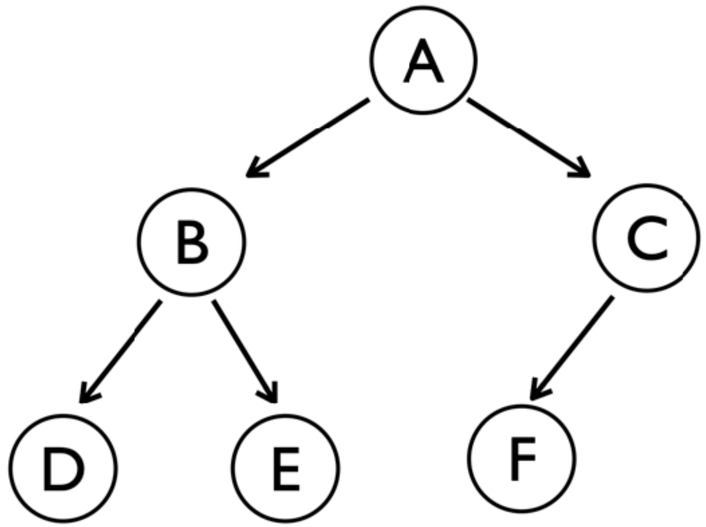
- 레벨 순회 (level order)는 각 노드를 레벨 순으로 순회하는 방법이다.
  - 동일한 레벨의 경우 좌에서 우로 방문한다.



이진트리의 순회

- 레벨 순회 (level order)는 각 노드를 레벨 순으로 순회하는 방법임
  - 동일한 레벨의 경우 좌에서 우로 방문함

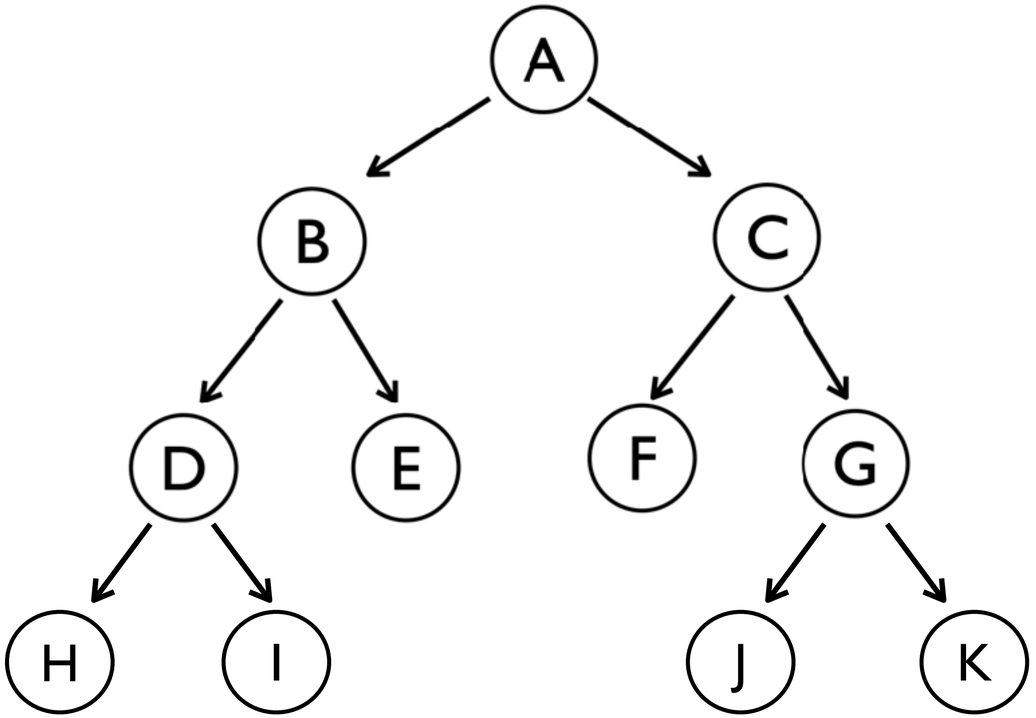
```
procedure levelOrderTraversal(root)
  queue ← createQueue()
  enqueue(queue, root)
  while isEmpty(queue) ≠ true do
    node ← dequeue(queue);
    if (node ≠ null) then
      process(node)
      enqueue(queue, node.left)
      enqueue(queue, node.right)
    end if
  end while
end procedure
```



A -> B -> C -> D -> E -> F

이진트리의 순회

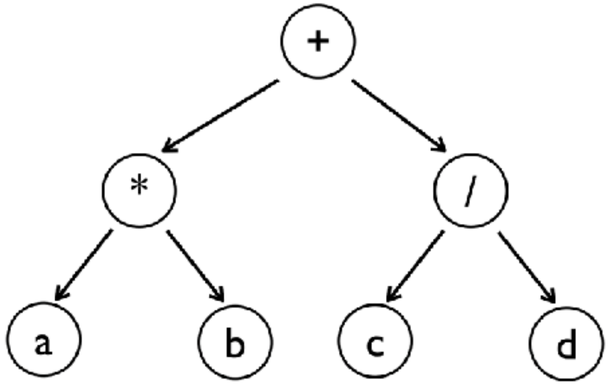
- Example: 아래 이진트리에서 전위순회, 중위순회, 후위순회 하였을 때 처리한 노드들이 처리된 순서는?



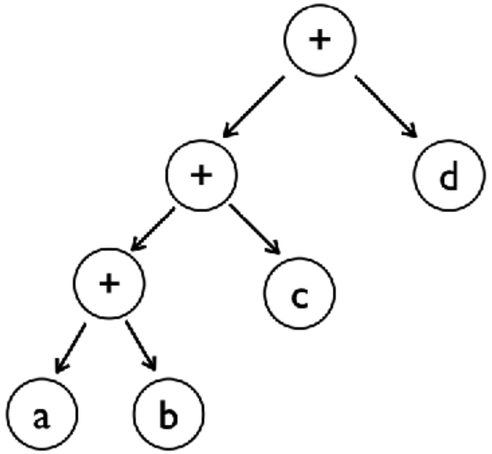
- 전위순회 (VLR):
- 중위순회 (LVR):
- 후위순회 (LRV):
- 레벨순회:

이진트리의 응용: 수식 표현 (Expression Tree)

- 수식을 표현한 이진 트리(expression tree)에서 각 노드는 연산자 (+, -, *, /) 또는 피연산자임
  - 모든 리프 노드들은 피연산자임
  - 루트 노드와 모든 내부 노드들은 연산자임
  - 서브 트리들은 식의 부분(subexpression)들을 표현함



(a*b) + (c/d)

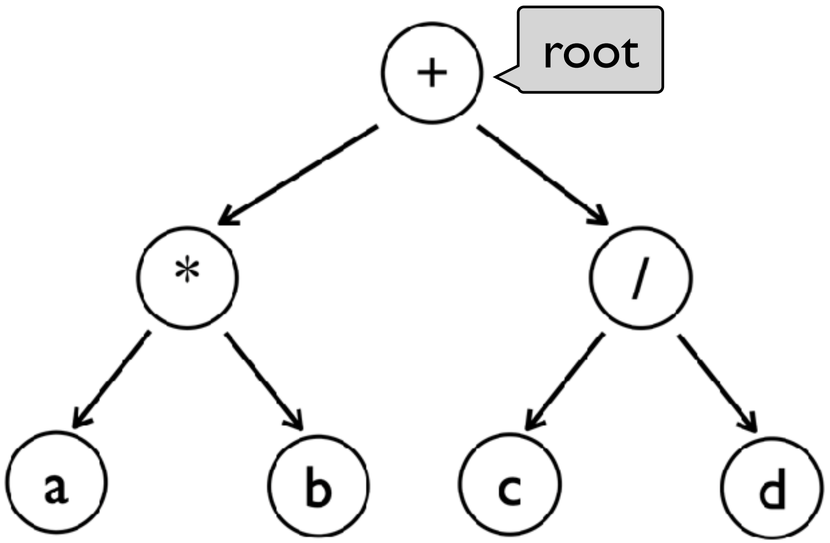


(((a+b)+c)+d)

연습 문제

- 순회로 이진 트리가 표현하고 있는 수식 출력하기

```
procedure printExpression(root)




end procedure
```

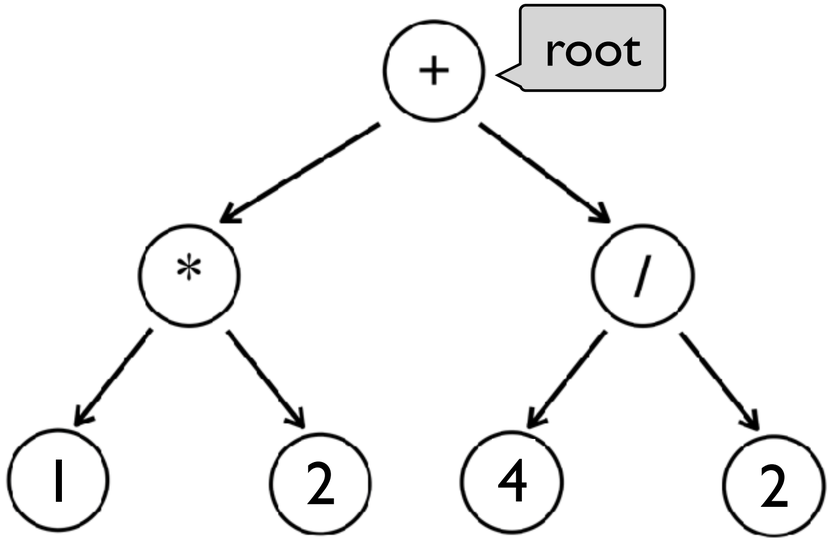


((a * b) + (c / d))

- 이진 트리가 표현하고 있는 수식의 값 계산하기

```
procedure eval(root)




end procedure
```

Example

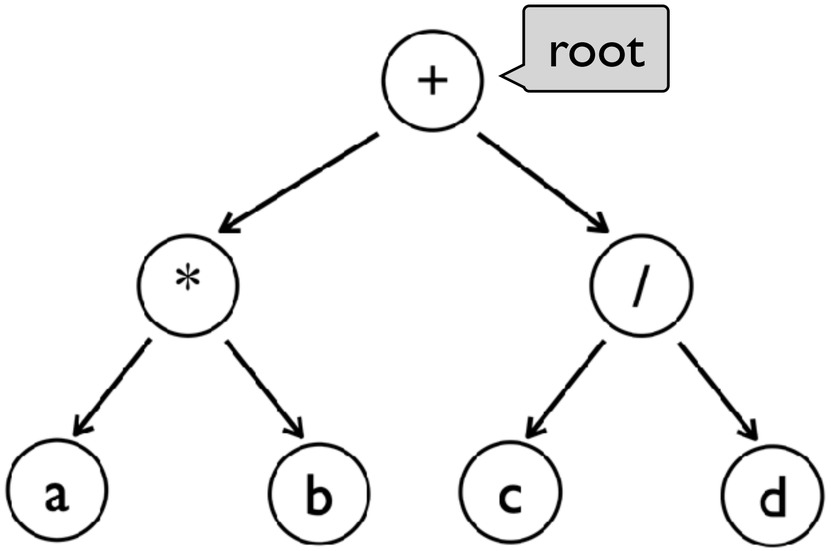



```
( ( 1 * 2 ) + (4 / 2) )
```

연습 문제

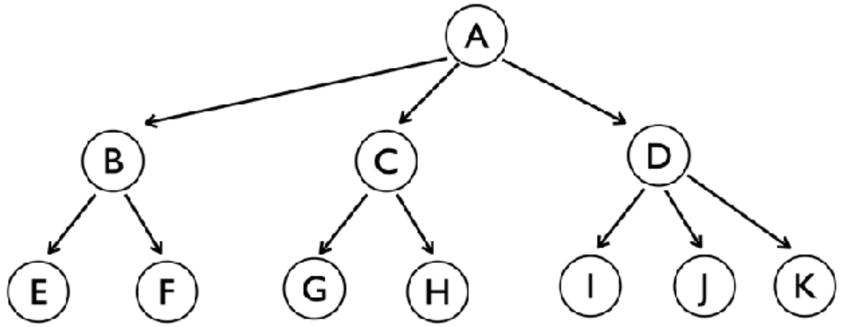
- 이진 트리의 높이를 구하는 알고리즘을 기술하시오

```
procedure height(root)




end procedure
```

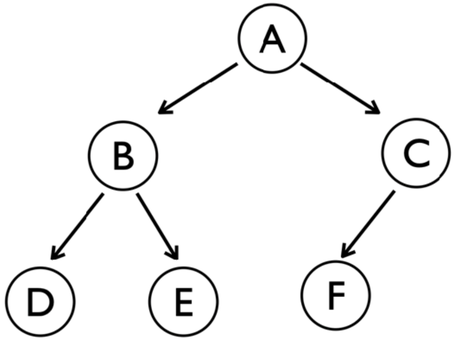


마무리

- 계층적 자료를 표현해야 하는 경우가 있음
  - 트리는 계층적 자료를 표현하는데 주로 사용하는 비 선형 (non-linear) 자료구조



- 이진트리(binary tree)는 모든 노드가 2개의 서브트리를 갖는 트리
  - 모든 노드의 차수는 2 이하임 (최대 2개까지의 자식노드를 가실 수 있음)

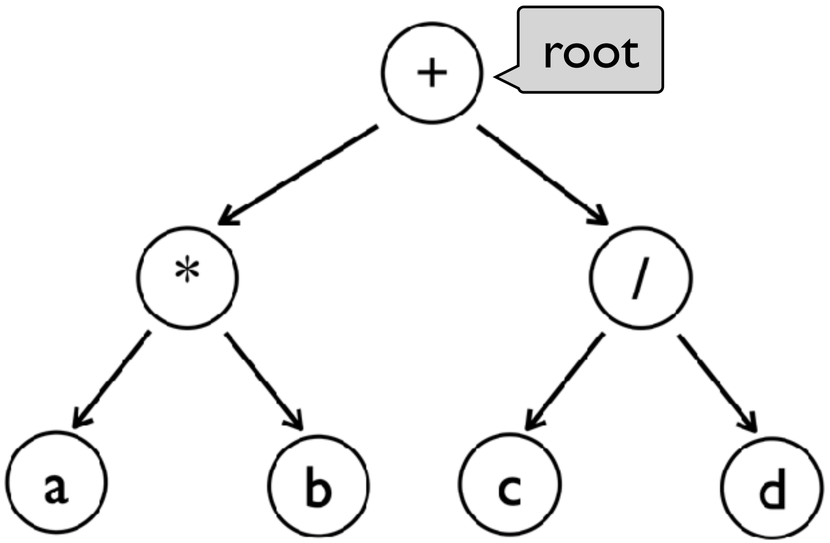


이진트리의 응용: 수식 표현 (Expression Tree)

- 순회로 이진 트리가 표현하고 있는 수식 출력하기

```
procedure printExpression(root)
  if root = NULL then
    return
  if root.left ≠ NULL or root.right ≠ NULL then
    print("(")
  end if
  printExpression(root.left)
  print(root.data)
  printExpression(root.right)
   if root.left ≠ NULL or root.right ≠ NULL then
    print(")")
  end if
end procedure
```

Example

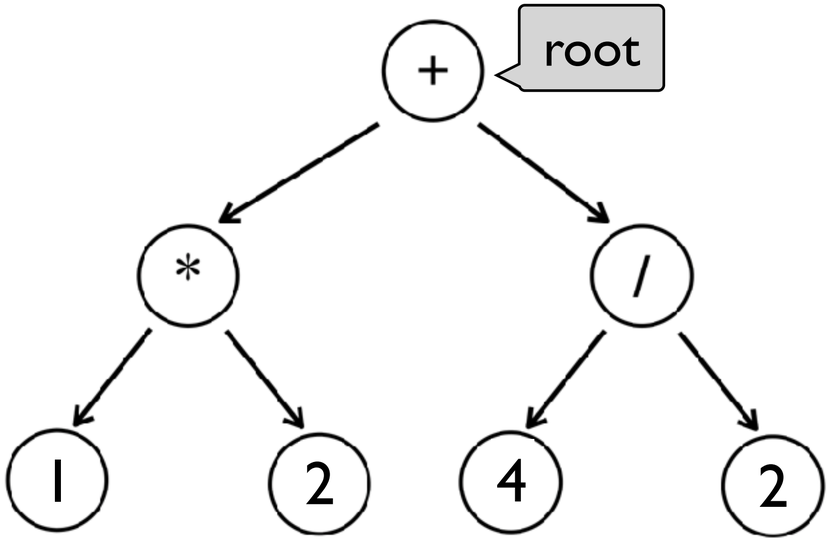


((a * b) + (c / d))

- 이진 트리가 표현하고 있는 수식의 값 계산하기

```
procedure eval(root)
  if root = NULL then
    return 0
  if root.left = NULL or root.right = NULL then
    return root.data
  end if
  leftValue ← eval(root.left)
  rightValue ← eval(root.right)
  if node.data = '+' then
    return leftValue + rightValue
  elif node.data = '-' then
    return leftValue - rightValue
  elif node.data = '*' then
    return leftValue * rightValue
  elif node.data = '/' then
    if rightValue = 0 then
      return error()
    else
      return leftValue/rightValue
    end if
  end if
end procedure
```

Example



((1 * 2) + (4 / 2))

Example

- 이진 트리의 높이를 구하는 알고리즘을 기술하시오

```
procedure height(root)
  if node = NULL then
    return 0
  leftHeight ← height(root.left)
  rightHeight ← height(root.right)
  if leftHeight > rightHeight then
    return leftHeight + 1
  else
    return rightHeight + 1
end procedure
```